

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXI - ANNO CXLIII

(2004)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXI - ANNO CXLIII

(2004)

LIGUORI EDITORE

Il presente volume è stato realizzato con il contributo della Regione Campania e del Ministero per i Beni Culturali

N. 71 - Dicembre 2004

ISSN 0370-3568

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'Editore. Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi forniti dalla Casa Editrice Liguori è disponibile al seguente indirizzo internet:

http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascuna pubblicazione. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% per pubblicazione, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail segreteria@aidro.org

© 2004 by Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 2004

Tutti i diritti sono riservati

Prima edizione italiana Dicembre 2004

Finito di stampare in Italia nel mese di Dicembre 2004 da OGL - Napoli

ISBN 88 - 207 - 3821 - X

La carta utilizzata per la stampa di questo volume è inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme UNI EN Iso 9706 ∞, realizzata con materie prime fibrose vergini provenienti da piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali, non inquinanti e totalmente biodegradabili.

INDICE

R. Sersale - <i>Cementi Speciali. Nota I. Natura, proprietà ed applicazioni del Cemento Alluminoso</i>	pag. 7
R. Sersale - <i>Cementi Speciali. Nota II. Sistemi cementizi ottenibili per associazione di cemento alluminoso con altri prodotti</i>	» 19
R. Sersale - <i>Produzione di cementi a ridotto consumo di energia. Nota I. Il clinker ricco di alinite</i>	» 31
A. Alberico - <i>Some properties of the first eigenvalue of nonlinear weighted problems and applications</i>	» 39
S. Rionero - <i>A rigorous link between the L^2-stability of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E. and the stability of the solutions to a binary system of O.D.E.</i>	» 53
N. Fusco - <i>The classical isoperimetric theorem</i>	» 63
R. Sersale - <i>Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia. Nota II. L'ecocemento</i>	» 109
R. Sersale - <i>Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo autocompattante</i>	» 115
R. Sersale - <i>Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia. Nota III. Cementi belitici e solfobelitici</i>	» 125
R. Sersale, G. Frigione - <i>La scoria granulata d'alto forno attivata con soluzione alcalina o con clinker nel cemento d'alto forno. Un paragone</i>	» 137
R. Sersale - <i>Le ceneri volanti: un prodotto supplementare ancora poco usato nel mondo per la fabbricazione di cementi compositi</i>	» 149
M. Bucci - <i>Some convergence problems</i>	» 163
S. Rionero, M. Vitiello - <i>Stability properties for Neumann boundary value problem in nonlinear diffusion</i>	» 175
F. Palladino, L. Lombardi, P. Occhinegro, N. Palladino - <i>Dall'estrazione di radice quadrata alla formula del binomio di Newton. Un lungo cammino per un segreto legame</i>	» 185
Appendice	
E. Burattini, R. Prevete - <i>Un ricordo di Francesco Lauria</i>	» 221
B. Preziosi - <i>Ricordo di Ciccio Lauria</i>	» 229

CEMENTI SPECIALI

Nota I. Natura, proprietà ed applicazioni del Cemento Alluminoso

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 6 Febbraio 2004)

Riassunto - Si passano in rassegna opportunità e limitazioni dell'impiego dei cementi alluminosi di contenuto medio (CAC) e di contenuto alto (HAC) di allumina.

Viene sottolineata l'utilità dell'impiego, a bassa temperatura, del tipo di cemento più usato (CAC), in virtù delle caratteristiche di rapido indurimento, dello sviluppo, dopo ventiquattro ore, di una resistenza meccanica pari a quella del Portland dopo ventotto giorni, dell'eccellente resistenza a molte forme di attacco chimico. Viene altresì evidenziato che la quantità di calore svolta, se anche inferiore a quella del Portland, viene però emessa durante il primo giorno dalla posa in opera, ciò che esclude l'impiego del cemento alluminoso per la realizzazione di getti di rilevante spessore.

Premesso che la sua chimica è sostanzialmente diversa da quella del cemento Portland, vengono discusse le reazioni d'idratazione, la trasformazione indesiderata che va sotto il nome di "conversione", la costituzione delle paste indurite, nonché le caratteristiche delle materie prime di partenza.

Viene posto in luce che le proprietà leganti non si annullano a temperatura elevata, sicchè il rimpiazzo di legami "idraulici" con legami "ceramici" rende possibile la preparazione di calcestruzzi refrattari con cementi ad alto contenuto di allumina, scegliendo opportunamente il tipo di aggregato.

Si consigliano infine i differenti settori d'impiego più appropriati per i cementi alluminosi.

Parole chiave: Cementi alluminosi; resistenza ai solfati ed all'acqua di mare; calcestruzzi refrattari.

Summary - Expediency and restrictions of the uses of calcium aluminate cements with intermediate (CAC) and high alumina content (HAC), are reviewed.

The opportunity of employing, at low temperatures, the most commonly used cement (CAC), by virtue of rapid hardening characteristics, strength gain much faster than Portland cement, excellent resistance to many forms of chemical attack, is stressed. It is also emphasized that nearly all the total quantity of heat evolved is produced during the first day, so that the use of calcium aluminate cement for remarkable thickness castings is to be avoided.

Considering that these cements have a radically different chemistry to Portland cements, the hydration reactions, the unwelcome transformation called "conversion" and the composition of hardened pastes, together with the characteristics of the raw meals and the fields of applications, are discussed.

Evidence is finally given that owing to the course of solid state reactions, "ceramic bonding" replace "hydraulic bonding" allowing the production of castable refractories. Thus cement with high alumina content have been developed and, in this case, conversion is only of minor importance.

Key words: Calcium aluminate cements; resistance to sulphate and sea water; refractory concretes.

L'interesse della produzione di cementi speciali risiede nella loro possibilità di offrire alcune proprietà caratteristiche che il cemento Portland non possiede. Pur tuttavia il cemento Portland, sotto forma di calcestruzzo, costituisce il materiale da costruzione più largamente usato nel mondo. La sua affermazione è principalmente dovuta:

- alla larga distribuzione delle materie prime di partenza ed alla facilità della loro estrazione;
- alla relativa economicità di produzione ed alla minore richiesta di energia rispetto ad altri materiali, quali acciaio, plastica, mattoni, se anche le enormi quantità di cemento prodotto hanno un notevole impatto sul consumo di energia e sull'emissione di anidride carbonica;
- fa presa ed indurisce, a temperatura ambiente e per semplice aggiunta d'acqua, con modesta modificazione di volume;
- presenta alta durabilità e resistenza alla penetrazione d'acqua, se correttamente preparato;
- consente di superare la scarsa resistenza a trazione per semplice annegamento del tondino di acciaio nel corpo della struttura.

È opinione generale che il clinker di cemento Portland abbia raggiunto il massimo delle caratteristiche intrinseche e dell'economicità di produzione (1), sicchè non è verosimile che cementi Portland con nuove caratteristiche possano provenire da nuovi clinker, ma piuttosto dal "taglio" di clinker attuali con sottoprodotti industriali od aggiunte minerali. Ciò, d'altra parte, si presenta allettante, poiché consente un aumento della produzione di cemento, una riduzione delle emissioni di anidride carbonica nell'atmosfera, un vantaggio ecologico attraverso il collocamento di rifiuti industriali ed il superamento di alcune limitazioni del cemento Portland, ad esempio: la resistenza ad attacchi chimici.

Ciò nondimeno le ricerche si sono orientate nella direzione della messa a punto di cementi dotati di rapido sviluppo di resistenza meccanica dopo la presa, di riduzione della porosità, al fine di migliorare la resistenza meccanica e

quella all'attacco chimico e di compensazione del ritiro, per evitare fessurazione.

Il primo cemento non-Portland ad essere prodotto è stato il cemento alluminoso (2), sviluppato per realizzare calcestruzzi idonei alla costruzione di gallerie ferroviarie in terreni gessosi (3).

La presenza di idrossido di calcio in calcestruzzi di cemento Portland e la sua attaccabilità da parte dei solfati, rappresentano il fattore chiave per interpretare il miglior comportamento, anche in presenza di acque leggermente acide, del calcestruzzo di cemento alluminoso rispetto a quello di Portland. A tale miglior comportamento concorre la sua attitudine a sviluppare una densa microstruttura superficiale.

Ricerche successive hanno posto in luce che il cemento alluminoso, in aggiunta al rapido indurimento, esibisce eccellente resistenza a molte altre forme di attacco chimico (4).

Ha presa normale ed indurimento rapido e si presta alla preparazione di un calcestruzzo che dopo sei ore esibisce ottima resistenza e, dopo ventiquattro ore, una resistenza meccanica pari a quella del Portland dopo ventotto giorni.

La quantità di calore svolto è, di norma, pari a $325-400 \text{ KJ} \cdot \text{Kg}^{-1}$, che, in qualche misura, è inferiore a quella del cemento Portland (5). Tale quantità è però svolta durante il primo giorno, sicchè il cemento alluminoso è indicato per costruzioni ordinarie in climi freddi e mai può esser utilizzato per getti di rilevante spessore (3). Esibisce anche ottima resistenza all'abrasione in applicazioni a bassa temperatura (5).

I cementi alluminosi, prodotti in Francia, Inghilterra, Germania ed USA, sono cementi speciali che contengono dal 40 al 80% di allumina. L'ampiezza di composizione li rende idonei per un gran numero di applicazioni: calcestruzzi refrattari, operazioni di pronto intervento, come componente di sistemi cementizi per malte e calcestruzzi speciali, in unione con cemento Portland ed altri prodotti (6).

Il più usato è il cemento che contiene circa il 40% di allumina. È preparato per fusione a $1450-1600^\circ\text{C}$ di una miscela di materie prime naturali (bauxite, o materiali alluminosi poveri di silice, e calcare) ed ha una complessa composizione di fase.

Per produrre un cemento con le desiderate proprietà di rapido indurimento, le materie prime devono esser povere di silice (5). Il clinker fuso è estratto in continuo dalla fornace e dopo solidificazione è macinato ad una finezza di circa $300 \text{ m}^2 \cdot \text{Kg}^{-1}$. Un'aliquota di ferro è presente come Fe^{+2} , quale risultato di una parziale atmosfera riducente nel forno. In tal caso, il ferro bivalente può esser presente come pleochroite (una soluzione solida complessa di ossido ferroso e ferrico, più silice e magnesia) ed in forma di wustite contenente calcio (5). Il colore può variare dal giallo bruno al nero, ma comunemente è grigiastro. La composizione media del cemento alluminoso (CAC) è compresa nei seguenti

limiti: CaO 34-44%; Al_2O_3 38-46%; $\text{FeO} + \text{Fe}_2\text{O}_3$ 8-20%; SiO_2 4-8%; TiO_2 1-2%; MgO 0,5-1,5%.

In tutti i cementi alluminosi il componente essenziale più idraulico e responsabile dello sviluppo della resistenza meccanica è l'alluminato monocalcico ($\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$). L'altra fase calcio alluminosa, in assai minore quantità, è il dodeca calcio epta alluminato ($12\text{CaO} \cdot 7\text{Al}_2\text{O}_3$). Tutte le altre fasi presenti hanno una reattività di gran lunga minore. In alcuni cementi ad alto contenuto di allumina (HAC) può esser presente il $\text{CaO} \cdot 2\text{Al}_2\text{O}_3$ (3), caratterizzato da una lenta reazione con l'acqua.

In tali cementi la maggior parte della silice è presente come silicato bicalcico ($\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$) (3).

Il monocalcio alluminato è presente per circa il 40-50% del prodotto ed è una soluzione solida contenente spesso Fe^{+3} e poco silicio. La fase ferrica ($2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot x \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot (1-x)_2 \text{O}_5$, nei limiti di circa il 5%, costituisce il 20-40% del prodotto ed il suo ammontare dipende dal contenuto di Fe_2O_3 della miscela di partenza. Le altre fasi sono presenti in tenori generalmente inferiori al 10% e spesso sotto il 5%. Il silicato bicalcico reca ferro ed alluminio in proporzioni simili alla belite del cemento Portland.

A contenuti di SiO_2 più alti si può formare gehlenite ($2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$), la cui presenza non è gradita, poiché non manifesta proprietà idrauliche. La perovskite (CaTiO_3) può esser presente in cementi che recano alto contenuto di TiO_2 nella miscela di partenza.

Il cemento alluminoso ha una chimica del tutto diversa da quella del cemento Portland, come risulta dalla Fig. 1.

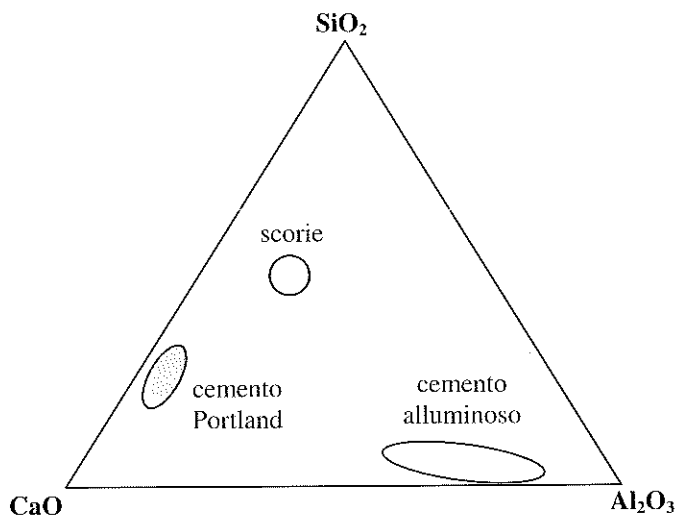
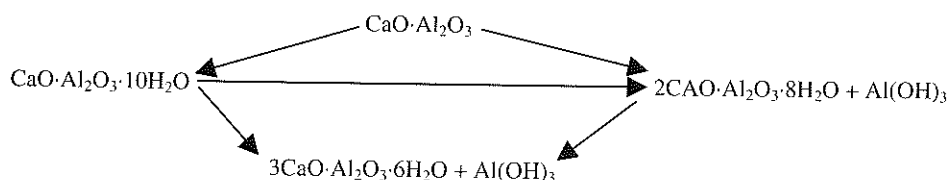


Figura 1 - Aree delle composizioni dei cementi: Portland, alluminoso e d'altoforno.

Le reazioni che hanno luogo nell'idratazione del cemento alluminoso dipendono dalla temperatura e possono esser schematizzate come appresso:



I principali prodotti iniziali sono $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ a bassa temperatura: $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O} + \text{Al}(\text{OH})_3$ a temperature intermedie: $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + \text{Al}(\text{OH})_3$ a più alte temperature (5).

Quest'ultima trasformazione che va sotto il nome di "conversione" delle paste di cemento alluminoso, non è desiderata poiché ha luogo dopo il parziale indurimento ed essendo accompagnata da diminuzione di volume, induce porosità e microfessure, con decremento, anche notevole, della resistenza meccanica.

La velocità di conversione cresce al crescere della temperatura. A 5°C sono necessari anni perché essa sia completa, mentre al disopra di 50°C il processo in pratica è immediato.

Una significativa influenza è esercitata anche dall'umidità sulla stabilità dei prodotti d'idratazione.

A bassa umidità predomina una parziale disidratazione degli idrati formati, piuttosto che la loro conversione ad alluminato tricalcico.

L'umidità sembra giocare un ruolo fondamentale nei processi di degradazione, dovuto al carattere particolare dei geli di allumina ed all'igroscopicità dell'alluminato alcalino. I processi di adsorbimento-desorbimento di acqua possono contribuire alla riduzione della resistenza meccanica, inducendo un certo rigonfiamento (7).

Il volume degli alluminati di calcio idrati neoformati nell'idratazione dell'alluminato monocalcico è inferiore alla somma dei volumi dell'alluminato monocalcico di partenza e dell'acqua che partecipa alla reazione. Il ritiro chimico a seguito dell'idratazione dell'alluminato monocalcico ammonta al 16% in volume nella formazione di $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ ed al 25%, se si formano come prodotti di reazione $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O} + \text{Al}(\text{OH})_3$ (3).

L'idratazione del cemento alluminoso è dominata da quella dell'alluminato monocalcico e degli alluminati presenti. Immediatamente dopo l'aggiunta d'acqua, l'ossido di calcio e l'allumina iniziano a passare in soluzione, fino al raggiungimento della saturazione (8). A temperatura ambiente la formazione degli idrati è piuttosto lenta, ma dopo un periodo d'induzione di alcune ore risulta notevolmente accelerata. Il rapporto molecolare $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ dipende dalla

composizione del cemento ed è, in generale, un po' maggiore di 1.0. Non appena l'idratazione risulta accelerata, cresce la velocità di sviluppo del calore d'idratazione e le concentrazioni di CaO ed Al_2O_3 nella fase liquida iniziano ad abbassarsi. A più basse temperature, fino a $15-20^\circ\text{C}$ il principale prodotto d'idratazione è $\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot 10\text{H}_2\text{O}$ (5). Quando aumenta la temperatura si formano crescenti quantità di $2\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot 8\text{H}_2\text{O} + \text{Al}(\text{OH})_3$, mentre a temperature ancor più alte si forma $3\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

L'idratazione della fase ferrica è molto più lenta rispetto al $\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3$ ed al $12\text{CaO}\cdot 7\text{H}_2\text{O}$ e poco incide sullo sviluppo della presa e della resistenza iniziale. Come prodotto finale si forma $3\text{CaO}(\text{Al}_2\text{O}_3, \text{Fe}_2\text{O}_3)6\text{H}_2\text{O}$ e come prodotti intermedi: $2\text{CaO}(\text{Al}_2\text{O}_3, \text{Fe}_2\text{O}_3)x\text{H}_2\text{O}$ e $4\text{CaO}(\text{Al}_2\text{O}_3, \text{Fe}_2\text{O}_3)x\text{H}_2\text{O}$.

Il silicato di calcio non origina una fase C-S-H ed idrossido di calcio libero, come avviene nel Portland, ma come prodotto d'idratazione si forma stratlingite anche denominata gehlenite idrata ($2\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot\text{SiO}_2\cdot 8\text{H}_2\text{O}$).

Le paste idratate di cemento alluminoso sono pertanto fondamentalmente costituite da alluminati idrati di calcio cristallini e da idrossido di alluminio in forma di gelo. Lo sviluppo della microstruttura è caratterizzato dalla deposizione dei prodotti d'idratazione nello spazio riempito dall'acqua, piuttosto che attorno ai grani in via d'idratazione (9). I prodotti d'idratazione non bloccano pertanto le superfici dei grani ed i costituenti del cemento possono continuare ad idratarsi rapidamente, sviluppando resistenze anche di 20 MPa dopo sei ore o meno, con rapporto acqua cemento di 0.4.

Il rapporto acqua cemento deve essere il più basso possibile. Il massimo valore accettabile è appunto 0.4. Il contenuto di cemento non deve esser inferiore a 400Kg/m^3 . In tal modo la caduta di resistenza dovuta alla conversione risulta abbattuta ed assicurata una porosità sufficientemente bassa a conversione avvenuta.

Le proprietà leganti delle paste di cemento alluminoso non si annullano a temperatura elevata (10). Le fasi idrate che costituiscono il cemento alluminoso idrato si decompongono progressivamente per riscaldamento, perdendo l'acqua combinata intorno ad $800-1000^\circ\text{C}$ (3).

Questa decomposizione termica è accompagnata da una perdita progressiva di resistenza. A partire da tali temperature, la decomposizione delle fasi idrate è accompagnata da reazioni allo stato solido, a seguito delle quali le fasi idrate, ormai prive d'acqua, rimpiazzano gradualmente gli idrati originari. Si registra pertanto una sostituzione dei legami "idraulici" con legami di natura "ceramica", con conseguente, rinnovato aumento di resistenza da parte del cemento.

Nelle miscele per malte e calcestruzzi possono ugualmente decorrere reazioni allo stato solido fra costituenti della pasta indurita ed aggregato.

La natura dei composti neoformati per reazioni allo stato solido dipende dalla composizione del legante e dell'aggregato ed in generale comprende fasi ad

alta temperatura di fusione, quali $\text{CaO} \cdot 2\text{Al}_2\text{O}_3$, $\text{CaO} \cdot 6\text{Al}_2\text{O}_3$ ed $\text{MgO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ (spinello) (3).

La resistenza del calcestruzzo di cemento alluminoso ad alta temperatura ed agli shock termici è dovuta alla natura delle fasi idrate originarie e, in particolare, all'assenza di idrossido di calcio.

La diminuzione della resistenza meccanica che ha luogo per riscaldamento ad $800\text{-}1000^\circ\text{C}$ ed il relativo valore non sono poi così notevoli e consentono l'impiego del legante in molte applicazioni, ad esempio: realizzazione di pavimentazioni per fonderia (11).

La temperatura d'inizio di fusione, che regola quella di servizio, cresce al crescere del rapporto $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{CaO}$ del legante. Pertanto, per incrementare la refrattarietà del prodotto, sono stati sviluppati cementi contenenti fino all'80% di allumina, preparati per sinterizzazione allo stato solido di allumina calcinata e calce o calcare, in forni rotanti.

Quelli per servizio ad alta temperatura dovrebbero contenere quantità trascurabili di Fe_2O_3 per incrementare la refrattarietà e la resistenza alla corrosione al monossido di carbonio, poiché Fe_2O_3 può andare soggetto a riduzione a ferro bivalente.

Dovrebbero anche recare un basso tenore di silice, poiché il suo contenuto nel legante può esser critico nei casi in cui il calcestruzzo di cemento alluminoso viene in contatto con idrogeno.

È imperativo impiegare appropriati aggregati che non contengano alcali rilasciabili, per evitare carbonatazione accelerata degli alluminati di calcio neoformati, operata dalla CO_2 dell'aria. Ciò provocherebbe la trasformazione degli alluminati di calcio idrati in carbonato di calcio ed idrossido di alluminio, con conseguente diminuzione del pH della soluzione dei pori e corrosione dell'armatura di acciaio. Un aggregato particolarmente idoneo è il calcare. Il carboalluminato di calcio idrato contribuisce infatti ad un miglioramento del legame fra pasta di cemento indurita e superficie dell'aggregato. Adoperando corindone come aggregato si registra anche un'elevata resistenza all'abrasione.

In presenza di idonei aggregati la temperatura di servizio può anche esser estesa oltre il punto di fusione del cemento (fino a 2000°C), per la formazione di eutettici di elevato punto di fusione.

Calcestruzzi refrattari ad alte prestazioni hanno sostituito in molti casi i mattoni refrattari ed il loro impiego si estende sempre più.

In calcestruzzi refrattari isolanti, gli aggregati convenzionali sono sostituiti da aggregati leggeri resistenti al calore, quali: vermiculite espansa (un materiale di tipo cloritico simile alla mica), perlite espansa (un vetro vulcanico), chamotte espansa o pomici. Tali calcestruzzi sono largamente usati per limitare le perdite di calore dei forni industriali.

Composizioni la cui temperatura di servizio si limita a $900\text{-}1000^\circ\text{C}$, sono ordinariamente considerate idonee alla produzione di calcestruzzi resistenti al

calore, piuttosto che a quella di calcestruzzi refrattari. Costano di cemento a basso contenuto d'allumina, in combinazione con basalto, granito od aggregati simili. Una tipica area di applicazione di questi cementi è la pavimentazione di officine dove si pratica spillamento di metallo caldo (11).

Con 15-20% di cemento alluminoso si producono densi refrattari convenzionali, con una refrattarietà regolata dal contenuto di allumina del cemento e dalla qualità dell'aggregato.

Si producono anche refrattari a basso contenuto di cemento alluminoso (5-8%), più fumo di silice ed allumina reattiva ed al 3-5% di cemento alluminoso, più fumo di silice ed allumina refrattaria ultrafine.

Per migliorare il comportamento del cemento alluminoso per calcestruzzi per alte temperature, è stato suggerito di aggiungere, nelle relative formulazioni, anche del vetro solubile. Un legante di questo tipo origina gibbsite colloidale ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$) ed idrati esagonali di alluminio di calcio $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ e $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, quali prodotti d'idratazione a temperatura ambiente (12).

Per riscaldamento queste fasi perdono l'acqua legata chimicamente e si forma gehlenite ($2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$) ad 800-1000°C. La resistenza residua cresce al crescere del modulo silicico del vetro solubile ($\text{SiO}_2/\text{Na}_2\text{O}$) e si aggira intorno al 60-100% della resistenza iniziale.

La resistenza del cemento alluminoso all'attacco chimico differisce da quella del calcestruzzo a base di silicati idrati. È determinata dalla natura chimica del legante, nonché dalla porosità (13) e dalla struttura dei pori della pasta che regolano la permeabilità. Essa è il fattore principale che determina la resistenza del calcestruzzo di cemento alluminoso agli agenti chimici.

A basso rapporto acqua/cemento, porosità e permeabilità di paste idratate ancora non convertite, sono sufficientemente basse per circoscrivere alla superficie della struttura in calcestruzzo l'azione corrosiva di qualunque agente esterno. Se la porosità cresce nel corso della conversione, cresce la disposizione all'attacco chimico. Una maniera efficace per impedire che ciò avvenga, è quella di impiegare rapporti iniziali acqua/cemento insufficienti per una completa idratazione. In tali condizioni, l'acqua che si libera dalle fasi idrate di alluminio di calcio esagonale inizialmente formate, reagisce con la frazione non idratata del cemento, conservando alla pasta indurita una bassa porosità.

Diversamente dal cemento Portland, le paste idratate di cemento alluminoso resistono alle soluzioni diluite di acido con $\text{pH} > 4$, comprese le acque naturali contenenti disciolta l'anidride carbonica e le acque di scolo (14), grazie all'assenza di calce libera. Resistono altresì alle acque superficiali contenenti solfati.

Una ragionevole interpretazione di ciò è ricercabile nel fatto che l'ettringite si forma attraverso una reazione in soluzione, piuttosto che attraverso una reazione topochemica, precipitando nei pori esistenti senza provocare tensioni in-

terne (3). In pari tempo, il riempimento dei pori con ettringite abbassa la permeabilità ed impedisce agli ioni solfato di raggiungere zone più interne.

Il cemento alluminoso in contatto con acque di mare si rivela più duraturo del cemento Portland. Anche in questo caso ha luogo la conversione, ma è generalmente molto lenta, tranne che in zone soggette a marea od in acque calde (15). Nell'idratazione si formano cloroalluminati (16). L'anidride carbonica dell'aria forma carboalluminati di calcio idrati ($4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot 0.5\text{H}_2\text{O}$) e ($4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$) ed alla fine gelo di allumina e carbonato di calcio. La velocità del processo cresce con la porosità della pasta indurita e con il riempimento d'acqua dei pori, funzione dell'umidità esterna. La velocità del processo è anche accelerata dalla presenza di idrossidi alcalini liberi. Ciò può capitare se il calcestruzzo di cemento alluminoso viene in contatto con quello di cemento Portland, i cui idrossidi alcalini possono migrare in esso. Se però si prepara un calcestruzzo con rapporto acqua/cemento sufficientemente basso, anche dopo la conversione la carbonatazione resta confinata ad una ristretta zona prossima alla superficie.

La carbonatazione del calcestruzzo di cemento alluminoso è stata tradizionalmente ritenuta potenzialmente più pericolosa di quella del calcestruzzo di cemento Portland per la corrosione delle armature di acciaio. Studi recenti non hanno però confermato questo timore. Determinazioni termodinamiche indicano che la carbonatazione procede ad alcalinità ben superiore alla soglia di depassivazione dell'acciaio (17).

Le paste di cemento ad alto contenuto di alluminato sono estremamente durabili anche in soluzione cloridrica severa (18). Il principale prodotto di corrosione è il sale di Friedel ($3\text{CaO} \cdot \text{CaCl}_2 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$), la cui formazione non provoca un aumento di porosità, sicchè la resistenza delle paste di cemento rimane alta.

La porosità, a parte la resistenza chimica delle fasi stabili, è dunque il principale fattore che controlla la resistenza chimica dei calcestruzzi di cemento alluminoso.

Per la preparazione di un buon calcestruzzo refrattario valgono gli stessi principi che presiedono alla produzione dei calcestruzzi per le applicazioni dell'ingegneria civile: sufficiente contenuto di cemento, basso rapporto acqua/cemento, appropriata compattazione e stagionatura.

I campi di applicazione testimoniano l'enorme flessibilità del cemento alluminoso. In differenti combinazioni con altri materiali può inoltre fornire un ampio spettro di proprietà. Molte delle speciali proprietà dipendono dallo sviluppo della microstruttura, quali: la resistenza meccanica (13), la resistenza all'attacco chimico, la resistenza all'abrasione superiore di due, tre volte a quella del cemento Portland (19), il rapido indurimento.

Sistemi cementizi inorganici con proprietà speciali possono esser ottenuti combinando il cemento alluminoso con calcite, scoria d'alto forno granulata, gesso o cemento Portland. In tali miscele il cemento alluminoso può essere il

costituente principale, o esser presente solo in quantità limitata per modificarne le proprietà. Tali sistemi possono esser prodotti miscelando i costituenti anidri od aggiungendoli separatamente alla miscela umida.

Limitazioni legali, alto costo, timori per il comportamento a lungo termine, condizionano un impiego diffuso del cemento alluminoso nelle applicazioni dell'ingegneria civile. Il suo impiego è appetibile laddove si richiede un rapido sviluppo di resistenza, come, ad esempio, nella produzione di prefabbricati in calcestruzzo. A ogni modo può esser impiegato senza preoccupazione in quelle applicazioni per le quali si prevede un limitato periodo di servizio.

Da sottolineare infine la sua insostituibilità nelle operazioni di pronto intervento, nelle applicazioni di alta temperatura e come calcestruzzo refrattario per una pluralità d'impieghi nell'ingegneria chimica.

Bibliografia

- (1) Scrivener K.L. Properties, applications and practicabilities of special cement. Proc. 11th Int. Congr. Chem. Cement. I, 84-93. Durban (2003).
- (2) Bensted J. High alumina cement- present state of knowledge. Zement-KalkGips, 46, 560-566, (1993).
- (3) Odler I. Special inorganic cements. E.FN Spon, London (2000).
- (4) Scrivener K.L., Capmas A. Calcium aluminate cements. F:M. Lea's Chemistry of cement and concrete. P.J.Hewlet Ed., 4th Ed., 709-778, Arnold, London (1998).
- (5) Taylor H.F.W. Cement Chemistry. Academic Press Ltd. London (1990).
- (6) Touzo B., Gloter A., Scrivener K.L., Fullmann T., Walenta G. Phase composition of 40% Al_2O_3 calcium aluminate cement. Proc. 11th Int. Congress Chem. Cement, 4, 1931-1940. Durban (2003).
- (7) Goni S., Andrade C., Sagrera J.L., Hernandez M.S. Alonso C. Behaviour of aluminous cement in highly alkaline media. Mechanism of chemical degradation of cement based systems. Scrivener and Young Eds., E., FN Spon, 272-280. London (1997).
- (8) Scian A.N., Porto-Lopez J.M., Pereira E. Mechanical activation of high alumina cement. Cement Concr. Res., 21, 51-60 (1991); 24, 937-947 (1994).
- (9) Lamour V.H.R. Monteiro P.J.M., Scrivener K.L., Fryda H. Microscopic studies of the early hydration of calcium aluminate cements. Mangabhai R.J. Ed., 199-213. Edinburg (2001).
- (10) Sersale R. Silicio, composti e materiali derivati. Trattato di Chimica Ind. ed Applic. Girelli, Matteoli, Parisi Ed. 802-805. Zanichelli, Bologna (1969).
- (11) Scrivener K.L., Cabiron J.L., Letourneaux R. High performance concrete based on calcium aluminate cements. Cement Concr. Res., 29, 1215-1223 (1999).
- (12) Krivenko P.V., Pushkaryeva E., Shapetko S.U. Alkali aluminate binder. Proc. 10th Int. Congress Chem. Cement, II, 2ii032. Goteborg (1997).

- (13) Lamour V.H.R., Monteiro P.J.M., Scrivener K.L., Fryda H. Mechanical properties of calcium aluminate cement concretes. In: Calcium aluminate cements, 199-213. Mangabhai R.J. and Glasser F.P. Eds., London (2001).
- (14) Letourneaux R., Scrivener K.L. The resistance of calcium aluminate cements to acid corrosion in wastewater applications. In: Modern concrete materials: binder additions and admixtures. Dhir R.K., Dyer T.S. Eds., 275-283. Thomas Telford, London (1999).
- (15) Baker N.C., Banfill P.F.G. The use of admixtures in high alumina cement mortars for the marine environment. Proc. 9th Int. Congress Chem. Cement, 4, 719-725. New Dehli (1992).
- (16) Halse Y., Pratt P.L. The development of microstructure in high alumina cements. Proc. 8th Int. Congress Chem. Cement, 4, 317-321. Rio de Janeiro (1986).
- (17) George C.M. Durability of calcium aluminate cement concrete: understanding the evidence. In: Mechanism of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener, Young Eds., 253-263. E.FN Spon, London (1997).
- (18) Kurdowski W., Duszak S., Sorrentino F. Microstructure of HAC paste after fifteen years of immersion in strong chloride solution. Proc. 11th Int. Congress Chem. Cement, 3, 1666-1675. Durban (2003).
- (19) Saucier F., Scrivener K.L., H  lard L., Gaudry L.: Calcium aluminate cement based concretes for hydraulic structures . Resistance to erosion, abrasion and cavitations: environment and loading. CONSEC'01. 2, 1562-1569. Vancouver, Canada (2001).

CEMENTI SPECIALI

Nota II. Sistemi cementizi ottenibili per associazione di cemento alluminoso con altri prodotti

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 5 Marzo 2004)

Riassunto - Vengono esaminate composizioni, caratteristiche di comportamento tecnico e limitazioni d'impiego di sistemi cementizi con proprietà speciali, preparati per associazione di cemento alluminoso con una pluralità di prodotti. Si prendono in considerazione le associazioni del cemento alluminoso con: cemento Portland, gesso, scoria d'alto forno granulata, microsilice, silicato bicalcico, silicato idrato di calcio, calcite, fosfato sodico, solfoalluminato di calcio, fibre di vetro, polimero, stronzio e bario.

Vengono discusse le modificazioni di proprietà che fanno seguito a ciascuna associazione, indicati i più appropriati campi d'impiego e segnalati i casi in cui l'uso è da evitare.

Parole chiave: cemento alluminoso, cemento Portland, cementi espansivi, scoria d'alto forno, fumo di silice, conversione, calcite, materiali cementizi esenti da macrodifetti (MDF), calcestruzzi refrattari.

Summary - Composition, technical behaviour and utilization limits of cementitious systems, prepared by blending calcium aluminate cement with a number of products and endowed with special properties, have been examined. The associations of calcium aluminate cement with: Portland cement, gypsum, granulated blast furnace slag, microsilica, dicalcium silicate, hydrated dicalcium silicate, calcium carbonate, alkali phosphate, calcium sulfoaluminate, glass fiber, organic polymer, strontium and barium, are considered. Property modifications following each association, suitable fields of application and utilizations to be avoided, are discussed.

Key words: calcium aluminate cement, Portland cement, expansive cements, granulated blast furnace slag, microsilica, conversion, calcium carbonate, macrodefect-free cement (MDF), refractory concrete.

In una Nota precedente (1) sono state studiate natura, proprietà e limitazioni d'impiego di cementi alluminosi a medio ed alto contenuto di allumina. Questa

Nota è invece dedicata allo studio di sistemi cementizi inorganici, con proprietà speciali, ottenibili per associazione di cemento alluminoso con una pluralità di altri prodotti.

Associazione di cemento alluminoso con cemento Portland.

Il cemento alluminoso può esser miscelato con cemento Portland ed esibire comportamenti differenti rispetto a ciascuno dei costituenti singoli per quanto attiene allo sviluppo della resistenza meccanica ed alla presa (2).

Piccole aggiunte di cemento Portland al cemento alluminoso, così come piccole aggiunte di cemento alluminoso al cemento Portland, abbreviano notevolmente il tempo di presa del risultante legante. Composizioni contenenti circa il 15% di cemento alluminoso e l'85% di cemento Portland, o circa il 15% di cemento Portland e l'85% di cemento alluminoso, con rapporti acqua/cemento che, a temperatura ambiente, originano una pasta di consistenza plastica, riducono a pochi minuti il tempo di presa.

Immediatamente dopo la presa, si registra un rapido sviluppo di resistenza meccanica, e, in meno di un'ora, i relativi valori sono già misurabili. La resistenza finale è però più bassa di quella del cemento Portland e del cemento alluminoso da soli.

Nella formulazione della miscela può esser impiegato cemento alluminoso preidratato, in luogo di quello anidro, con conseguente miglioramento della lavorabilità del legante.

Nelle miscele nelle quali il costituente maggiore è il cemento alluminoso, la reazione più responsabile della presa e dello sviluppo della resistenza, è l'idratazione estremamente rapida delle fasi calcio alluminose. Ciò è una conseguenza dell'aumento del valore del pH della miscela, provocato dall'aggiunta di cemento Portland. Nelle miscele in cui il costituente maggiore è il cemento Portland, la presa è dovuta alla reazione preferenziale del gesso con il cemento alluminoso, con rapida formazione di ettringite ed all'idratazione del cemento alluminoso.

L'idratazione dei silicati di calcio ha una scarsa influenza sul processo di presa, pur contribuendo al successivo sviluppo di resistenza (3). Nel processo d'idratazione, oltre alla fasi formate per idratazione del cemento Portland e del cemento alluminoso puri, si può anche formare stratlingite (gehlenite idrata: $2\text{CaO}\cdot\text{SiO}_2\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot 8\text{H}_2\text{O}$).

Miscele di cemento Portland e cemento alluminoso possono esser impiegate per applicazioni che richiedono una presa ed un indurimento estremamente rapidi. Un'ulteriore accelerazione della presa ed indurimento possono esser prodotti con aggiunta al sistema di piccole quantità di un sale di litio (già in concentrazioni del 0.5%). Tale accelerazione è probabilmente dovuta alla forma-

zione di una piccola quantità di $\text{Li}_2\text{O} \cdot 2\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 11\text{H}_2\text{O}$, che agisce come substrato di nucleazione per l'alluminato bicalcico ($2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$) (4).

Preparazione di cementi espansivi.

Se il gesso si associa al cemento alluminoso in proporzione corrispondente al 15-40% in peso come SO_3 , il risultante cemento esibisce proprietà espansive e può essere usato come cemento autostressante, a ritiro, cioè, compensato. Il principio è quello di bilanciare il ritiro per essiccazione, al fine di impedire la fessurazione.

Come prodotti d'idratazione si formano ettringite ed allumina idrata (5).

Per contenuti più bassi di SO_3 nella miscela si può anche formare monosolfato o quest'ultimo si può originare dal trisolfato (ettringite) precedentemente prodotta.

La conseguente espansione cresce con il contenuto di gesso e, fino a circa 40°C , anche con l'aumento della temperatura. Il valore di autotensione del legante cresce al crescere del rapporto $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 / \text{CaO} \cdot 2\text{Al}_2\text{O}_3$.

Gli usi pratici dei cementi a ritiro compensato includono: parcheggi di auto a più piani o serbatoi d'acqua, nei quali è essenziale l'eliminazione di perdite.

Se al cemento Portland si associano limitati contenuti di cemento alluminoso ed ulteriori quantità di gesso, a seguito dell'idratazione il tenore di ettringite aumenta più di quello che si origina nel cemento Portland da solo e si registra espansione. Il medesimo effetto si registra se vengono simultaneamente macinati il clinker di Portland (piuttosto che il cemento Portland), il clinker di cemento alluminoso e tenori di gesso maggiori di quelli normalmente presenti nel clinker di Portland. Il tempo di presa si riduce e l'espansione del legante aumenta all'aumentare del contenuto di solfato di calcio e di cemento alluminoso. Un legante di questo tipo è comunemente denominato cemento espansivo di tipo M. Le sue caratteristiche di espansione possono essere controllate sulla base delle proporzioni dei singoli costituenti e della temperatura di stagionatura. Se l'idratazione decorre a temperatura ambiente e con basso rapporto acqua/cemento, si forma inizialmente l'alluminato di calcio monosolfatico, in aggiunta al trisolfato (ettringite). Se il relativo calcestruzzo viene esposto all'acqua, il monosolfato passa a trisolfato e si registra espansione. A più alti rapporti acqua/cemento ed a più alta temperatura, si origina direttamente il trisolfato quale unico solfoalluminato di calcio. Poiché la reazione procede assai rapidamente, la maggior parte del trisolfato si forma prima della presa, senza causare espansione. Soltanto dopo la presa ha luogo una limitata espansione, poiché l'alluminato monocalcico non idratato, residuo, va soggetto ad idratazione associata alla formazione di ettringite.

Associazione di cemento alluminoso alla scoria d'alto forno granulata.

Se il cemento alluminoso si associa alla scoria d'alto forno granulata in proporzione 1:1 e si idrata a temperatura ambiente, o a temperatura moderatamente elevata, è stato osservato un deciso aumento di resistenza, senza quel decremento che è usuale nel cemento alluminoso puro (6).

La resistenza alle brevi stagionature è più bassa di quella del cemento alluminoso puro, ma quella alle lunghe stagionature è più alta della resistenza del cemento alluminoso puro dopo conversione.

Nell'idratazione di queste miscele, le fasi $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ e $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ neoformate a temperatura ambiente, o la fase $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ formata a temperatura elevata, sono gradualmente sostituite da stratlingite (gehlenite idrata $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$) che rappresenta la fase stabile nel sistema $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ a tale temperatura (7). Essa si forma per reazione fra le fasi calcio alluminose idrate e gli ioni silicato che si originano dalla scoria e può inglobare discrete quantità di ioni estranei, in particolare Fe^{+3} , Mg^{+2} , SO_4^{-2} e Ti^{+4} (8).

Contemporaneamente si forma una fase amorfa sulla superficie delle particelle di scoria, quale probabile combinazione di C-S-H e gelo di allumina ed anche geli di fasi idrate non ancora cristallizzate (7). Nelle miscele contenenti scoria ad alto contenuto di magnesia, nell'idratazione si possono anche formare fasi di tipo idrotalcite (8) $[\text{Mg } 0.75 \text{ Al } 0.25 (\text{OH})_2] (\text{OH}) 0.25 (\text{H}_2\text{O}) 0.5$.

In miscele con differenti rapporti cemento alluminoso/scoria, a differenti temperature e dopo 90 giorni, sono state riscontrate le seguenti fasi idrate (2):

– cemento alluminoso 80% + scoria 20%:

5°C $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$;
40°C $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ e modeste quantità di $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ e $\text{Al}(\text{OH})_3$.

– cemento alluminoso 50% + scoria 50%:

5°C $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ e modeste quantità di $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$;
40°C $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8 \text{H}_2\text{O}$ e $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

– cemento alluminoso 20% + scoria 80%:

5°C $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$;
40°C $2\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$.

Adeguate quantità di scoria d'alto forno granulata impediscono od ostacolano fortemente la conversione dell'alluminato monocalcico e dell'alluminato bicalcico idrati, precedentemente formati, in alluminato tricalcico idrato.

Un legante di questo tipo appare idoneo per applicazioni nelle quali è richiesto un lungo servizio delle strutture (9).

Il legante mostra anche eccellente resistenza ai solfati, all'acqua di mare ed all'acqua dolce (6).

L'idratazione procede in modo diverso se le miscele di cemento alluminoso e scoria d'alto forno granulata si impastano, anziché con acqua, con una soluzione 2M di carbonato sodico.

La formazione di stratlingite è impedita o contenuta e si formano invece carboalluminato di calcio ($4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot 11\text{H}_2\text{O}$), così come $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$.

Ad alti contenuti di scoria si può formare anche carbonato di calcio (7).

Le miscele impastate con soluzione di carbonato sodico mostrano, se paragonate con quelle impastate con acqua, più alta resistenza per più basso e medio contenuto di scoria. Con l'aumento di scoria la resistenza si abbassa (7).

Associazione di cemento alluminoso con microsilice.

Il fumo di silice condensato è un sottoprodotto della produzione di silicio, o di leghe di silicio, a seguito di riduzione del quarzo al forno elettrico. È costituito da una polvere amorfa, finissima, generata da un'aliquota di SiO sfuggita come gas ed ossidata dall'aria.

Associata al cemento alluminoso non va soggetta a reazione "pozzolanica", come quando viene addizionata al cemento Portland (10), perché nell'idratazione non si forma idrossido di calcio libero.

Le paste di cemento alluminoso non contengono inoltre rilevanti quantità di idrossidi alcalini ed il pH della soluzione dei pori è decisamente più basso di quello delle paste di cemento Portland.

È stato però osservato che per associazione di microsilice al cemento alluminoso, in proporzione del 10-15%, viene impedita o rallentata la reazione di conversione e si forma stratlingite. Viene in tal modo contrastato il decremento di resistenza che fa seguito alla trasformazione degli alluminati idrati di calcio esagonali, in alluminato tricalcico cubico (11).

L'addizione di microsilice ritarda inoltre l'idratazione dell'alluminato monocalcico, con conseguente riduzione dello sviluppo della resistenza alle brevi stagionature.

Associazione di cemento alluminoso con silicato bicalcico o con silicato di calcio idrato, gelatinoso.

L'alluminato monocalcico idrato e l'alluminato bicalcio idrato, neoformati per idratazione di miscele di cemento alluminoso e silicato bicalcico anidro o

preidratato, tendono ad evolvere in stratlingite, piuttosto che in alluminato tricalcico. Questa è pertanto un'altra via per impedire il decremento di resistenza conseguente alla reazione di conversione (12).

Associazione di cemento alluminoso con carbonato di calcio.

L'aggiunzione di calcite finemente macinata al cemento alluminoso si traduce nella formazione di carboalluminato di calcio idrato ($4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCO}_3 \cdot 11\text{H}_2\text{O}$), in luogo di alluminato bicalcico idrato e alluminato tricalcico idrato.

Per aggiunte sufficientemente alte di calcite, può esser evitata la reazione di conversione e la conseguente perdita di resistenza (13), anche se la validità a lungo termine di tale risultato è messa in discussione.

Reazione di conversione e perdita di resistenza possono parimente esser evitate per trattamento del calcestruzzo fresco con anidride carbonica (gas di camino) (13).

Associazione di cemento alluminoso con fosfato sodico.

Addizionando polimeri inorganici a base di fosfato sodico, quali $(\text{NaPO}_3)_n$ o $(\text{NaPO}_3)_n \cdot \text{Na}_2\text{O}$, al cemento alluminoso (HAC), si registra un'accelerazione della velocità d'idratazione ed un notevole miglioramento della resistenza meccanica, rispetto al solo cemento alluminoso: resistenza a flessione fino a 34 MPa dopo un giorno.

All'indagine roentgenografica i relativi prodotti d'idratazione appaiono amorfi (14).

Associazione di cemento alluminoso con silicato sodico.

La presenza di modeste quantità di silicato sodico nelle paste di cemento alluminoso promuove la formazione di stratlingite e l'idratazione del cemento risulta fortemente ritardata. La formazione di idrogranato viene ritardata, ma non impedita (15).

Associazione di cemento alluminoso con solfoalluminato di calcio e microsilice.

È stato preparato un legante costituito da una miscela di: alluminato di calcio amorfo, anidrite e microsilice, nelle proporzioni di 68:12:20 in peso, con aggiunta di un superfluidificante a base di naftalinsolfonato. Per aggiunta

d'acqua, acciaio in polvere ed in fibre, nel rapporto: legante, acciaio in polvere, acciaio in fibre, acqua :100:150:20:21, dopo stagionatura di sette giorni in acqua a 50°C, il prodotto indurito ha raggiunto resistenza a compressione di 180 MPa e resistenza a flessione di 33 MPa (16). I prodotti d'idratazione sono risultati: ettringite, alluminato tricalcico idrato e gelo d'allumina. Presenti anche notevoli quantità di alluminato monocalcico non reagito ed anidrite.

Per riscaldamento a temperatura fra 110 e 600°C, gli idrati si decompongono e si forma in sostituzione $12 \text{ CaO} \cdot 7 \text{ Al}_2\text{O}_3$. La resistenza a compressione raggiunge 280 MPa e quella a flessione 55 MPa.

Il cemento alluminoso è stato anche proposto come legante di compositi rinforzati con fibre di vetro, in considerazione del fatto che il pH della soluzione dei pori è decisamente più basso di quello della soluzione dei pori del cemento Portland. Nel corso dell'idratazione non si mette inoltre in libertà idrossido di calcio, responsabile dell'infragilimento osservato in questi prodotti dopo prolungati periodi di stagionatura (17).

Produzione di leganti esenti da macrodifetti (MDF).

Il cemento alluminoso, preferibilmente quello ad alto contenuto di allumina, si rivela più adatto del cemento Portland per la produzione di materiali cementizi modificati con polimero. Essi si presentano in massa pastosa e vanno sotto il nome di materiali esenti da macrodifetti. Sono stati messi a punto nei primi anni del 1980 (18) ed hanno denunciato resistenza a compressione intono a 300 MPa, modulo di Young 50 GPa, una sorprendente resistenza a flessione (200 MPa), ottima tenacità a frattura ed offrono la possibilità di realizzare prodotti di piccolo volume ed alta tecnologia.

La denominazione inizialmente scelta: "cementi esenti da macrodifetti" (MDF) non appare però appropriata poiché un ruolo fondamentale è giuocato dal polimero. È stata pertanto proposta la denominazione di "cemento organocomposito" e l'abbreviazione OCC in luogo di quella MDF (19), che meglio definisce questa famiglia di materiali.

Tale più corretta denominazione non è però entrata nell'uso corrente, sicché questi materiali recano tuttora il nome di cementi esenti da "macrodifetti".

Essi sono ottenuti incorporando nel cemento alluminoso un polimero solubile in acqua, ad esempio un polivinilalcol (PVA), che agisce dapprima come mezzo disperdente e poi come legante reattivo, ostacolando le normali reazioni d'idratazione del cemento e reagendo con ioni calcio ed alluminio per sviluppare legami incrociati ed acetato di calcio.

La microscopia elettronica a trasmissione ha posto in luce un materiale essenzialmente costituito da una dispersione di grani di clinker, o di prodotti d'idratazione, in una matrice polimerica continua.

Il prodotto finale si rivela costituito da una massa pastosa che può esser lavorata con metodi convenzionali mutuati dalla tecnologia delle materie plastiche: calandratura o estrusione nella forma desiderata.

I rapporti fra singoli costituenti, considerati tipici, sono: cemento inorganico 75-85%; polimero organico 5-10%; acqua 8-15%.

È anche possibile aggiungere alla miscela alcuni riempitivi inorganici: silice finemente macinata, ceneri volanti, polveri metalliche che aumentano la conduttività elettrica e termica, carburo di silicio che aumenta la resistenza all'abrasione.

La resistenza meccanica è imputabile alla presenza di fasi cristalline e di fasi non reagite del clinker, dense, compattate, in prodotti a bassa porosità. Le microstrutture di paste cementizie pressate a caldo (20) e di cementi privi di macrodifetti (MDF) (21), appaiono infatti dense e compattate ed i cristalli di idrossido di calcio, se presenti, sono piccoli ed uniformemente distribuiti.

Nei cementi privi di macrodifetti l'idrossido di calcio può trovarsi infatti in lamelle di soli 10 nm di spessore (22).

È stato ipotizzato (23) che i cementi MDF debbano l'alta resistenza principalmente all'assenza di grosse crepe, ritenute la causa della relativa debolezza delle normali paste di cemento. Questa ipotesi è stata però messa in dubbio (24), perché è più verosimile che al polimero sia affidato un ruolo determinante.

Il principale prodotto posto in luce per idratazione delle paste di cementi pressati a caldo è il $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (25).

Le paste MDF iniziano a degradare quando i legami incrociati diventano troppo densi, il polimero diviene troppo rigido, aprendo la via al reingresso di macrodifetti.

Al giorno d'oggi il principale problema che limita l'impiego di cementi MDF è il degrado cui vanno soggetti per immersione in acqua. Dapprima infatti l'acqua è adsorbita dall'alcool polivinilico (PVA), dal quale diffonde nei grani di cemento ed ha luogo un'ulteriore idratazione.

Appena il polimero rigonfia e rammollisce, la resistenza cala rapidamente e, più tardi, la precedente microstruttura viene gradualmente rimpiazzata da fasi idrate convenzionali. La perdita di resistenza, che può superare il 50%, può esser attribuita ad un rigonfiamento ed indebolimento della fase organica polimerica originale e può aumentare con l'umidità relativa. Si fanno pertanto tentativi per ridurre od eliminare l'effetto negativo dell'umidità e la ricerca è protesa a risolvere il problema del degrado dovuto al contatto con acqua. Sembra promettente il ricorso ad un organotitanato.

Anche la resistenza ad elevata temperatura è limitata dalla presenza di costituenti organici. Intorno a 500°C il polimero brucia e la resistenza si abbassa notevolmente.

Finora i cementi MDF sono prodotti in quantità limitate. Possibili impieghi sono: armature e veicoli protetti; elementi strutturali soggetti a carico (pavimenti, soffittature), contenitori per scorie nucleari, tubazioni per trasporto di gas.

Paragonati ai metalli, un netto vantaggio dei materiali MDF è rappresentato dalla loro attitudine ad esser formati a bassa temperatura e senza lavorazione meccanica.

Associazione di cemento alluminoso con stronzio o con bario.

Per produrre calcestruzzi refrattari utilizzabili fino a temperature dell'ordine di 2000°C, si può associare stronzio al cemento alluminoso.

Si sottopone a sinterizzazione allo stato solido una miscela approssimativamente equimolecolare di SrO o di SrCO₃ ed Al₂O₃ a circa 1500 °C (26). Il costituente principale è il monostronzio alluminato (SrO·Al₂O₃), ma può esser presente anche un certo tenore di esalluminato (SrO·6Al₂O₃).

Il cemento si idrata con relativa lentezza, generando un alluminato idrato di stronzio di composizione approssimata SrO·Al₂O₃·7-10H₂O. Successivamente tale fase si converte in 6SrO·Al₂O₃·6H₂O + Al(OH)₃, con conseguente decremento di resistenza.

Per applicazioni fino a 2000°C si può anche associare all'allumina il bario ed ottenere, per sinterizzazione allo stato solido a 1400-1500°C, un prodotto che mostra un notevole miglioramento delle proprietà refrattarie rispetto al cemento alluminoso. Si rivela particolarmente idoneo a proteggere da radiazioni radioattive e da raggi X.

Si prepara a partire da una miscela approssimativamente equimolecolare di BaCO₃ ed Al₂O₃, aggiungendo un mineralizzatore, quale MgO, per ridurre la temperatura di sinterizzazione.

Il costituente principale è il monoalluminato di bario (BaO·Al₂O₃), ma possono esser presenti anche 3BaO·Al₂O₃ ed esalluminato di bario (BaO·6Al₂O₃).

Per rapporti acqua/cemento inferiori a 0.35, la principale fase cristallina neoformata è l'alluminato monobarico eptaidrato (BaO·Al₂O₃·7H₂O), mentre a rapporti più alti si formano anche l'alluminato tribarico esaidrato (3BaO·Al₂O₃·6H₂O), insieme con gelo d'allumina.

Il cemento alluminoso con bario si idrata rapidamente e, a rapporti acqua/cemento sufficienti, l'idratazione è completa in tre giorni.

Se riscaldata ad alta temperatura, la pasta di cemento indurita mostra soltanto una modesta perdita di resistenza.

Quanto sopra esposto dimostra l'enorme versatilità del cemento alluminoso, le sue possibili utilizzazioni, le precauzioni che si possono adottare per ampliarne talvolta le applicazioni.

Bibliografia

- (1) Sersale R. Cementi speciali. Nota I. Natura, proprietà ed applicazioni del cemento alluminoso. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, 71 (2004).
- (2) Odler I. Special inorganic cements. F.FN. Spon. London (2000).
- (3) Gu P., Y. Fu P., Xie, J.J. Beaudoin. A study of the hydration of setting behaviour of OPC-HAC pastes. Cement Concr. Res., 24, 682-694 (1994).
- (4) Rodger S.A., Double D.D. The chemistry of hydration of high alumina cement in the presence of accelerating and retarding admixtures. Cement Concr. Res., 14, 72-82 (1984).
- (5) Bayoux J.P., Testud M., Espinosa B. Thermodynamic approach to understand the $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-SO}_3$ system. Proc. 9th ICCI, New Dehli, 4, 164-169 (1992).
- (6) Osborn G. J., Sing B. The durability of concretes made with blends of high-alumina cement and ground granulated blast furnace slag. ACI SP-153, 885-909 (1995).
- (7) Romero M., Blanco-Varela M.T., Palomo A., Puertas F., Vasquez T. Activation of blast furnace slag/high alumina cement pastes: mechanical and microstructural evolution. Proc. 10th ICCI, Goteborg, 3 ii 096 (1997).
- (8) Rayment D.L., Majumdar A. J. Microanalysis of high-alumina cement clinker and hydrated HAC/slag mixture. Cement Concr. Res., 24, 335-342 (1994).
- (9) Quillin K.C., Majumdar A. J. Phase equilibria in the $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2\text{-H}_2\text{O}$ system at 5°, 20°, 38° C. Advances Cement Res., 6, 47-56 (1994).
- (10) Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota I. Malte e calcestruzzi con addizione di fumo di silice condensato. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, 67, 101-109 (2000).
- (11) Collepardi M., Monosi S., Piccioli P. The influence of pozzolanic materials on the mechanical stability of aluminous cements. Cement Concr. Res., 25, 5, 961-968 (1995).
- (12) Rao P.B. Chemistry of arresting strength retrogression in structural High alumina cements. Proc. 7th ICCI, 3, V, 51-56. Paris (1980).
- (13) Trivino E. Aluminous cement: how to avoid degrading of mechanical resistance. Proc. 8th ICCI, 4, 417-422. Rio de Janeiro (1986).
- (14) Ma W., Brown P.W. Cement inorganic polymer composites. Microstructure and strength development. Proc. 9th ICCI, 4. New Dehli (1992).
- (15) Ding J., Y. Fu., Beaudoin J. J. Study of hydration mechanism in the high alumina cement-sodium silicate system. Cement Concr. Res., 26, 799-804 (1996).
- (16) Mino I., Sakai E., Nishioka A. The hydration and calcinations mechanism of calcium aluminate-based ultra-high strength cement with calcium sulfoaluminate compound. Materials Res. Symp. Proceeding 179, 193-202 (1991).
- (17) Majumdar A.J., Singh B., Ali M.A. Properties of high alumina cement reinforced with alkali resistant glass fibers. Journ. Mat. Sc. 16, 2597-2607 (1981).

- (18) Birchall J. D., Kelly A. New inorganic materials. *Scient. Amer.* 248- (5), 104-115 (1983).
- (19) Joung J: F: Engineering advanced cement-based materials for new applications . *Concrete Techn. E FN Spon*, 103-112. London (1995).
- (20) Roy D.M., Gouda G.R., Bobrowsky A. Very high strength cement pastes prepared by hot pressing and other high pressure techniques. *Cement Concr. Res.*, 2, 349-366 (1972).
- (21) Sinclair W., Groves G.W. High strength cement pastes. *Journ. Mat. Sci.*, 20, 2846 – 2852 (1985).
- (22) Groves G.W. Microcrystalline calcium hydroxide in Portland cement pastes of low water/cement ratio. *Cement Concr. Res.*, 11, 713-718 (1981).
- (23) Kendall K., Howard A. J., Birchall J. D. *Phil. Trans. R. Soc. London A* 310, 139 (1983).
- (24) Beaudoin J.J., Feldman R.F. High-strength cement pastes. A critical appraisal. *Cement Concr. Res.*, 15, 105-116 (1985).
- (25) Feldman R.F., Beaudoin J.J. Microstructure and strength of hydrated cement. *Cement Concr. Res.*, 6, 389-400 (1976).
- (26) Borovkova L. B. An investigation into the hardening of monostrontium aluminate. *Proc. 9th ICC*, 4, 51-56. New Dehli (1992).

Produzione di cementi a ridotto consumo di energia

Nota I. Il clinker ricco di alinite

Nota del socio Ord. Res. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 2 Aprile 2004)

Riassunto - Vengono esaminate le differenti metodologie di riduzione del consumo di energia per la produzione di clinkers di cemento.

Premesso che nella produzione del cemento Portland la maggior parte dell'energia viene consumata nella dissociazione del carbonato di calcio della miscela generatrice e nel mantenimento della temperatura a 1450°C, si prende in considerazione sia la riduzione di tale tenore, sia l'abbassamento della temperatura di esercizio del forno.

Viene mostrato che può esser prodotto, con un risparmio di energia di circa il 30%, un clinker nel quale la fase alite (il silicato tricalcico, principale costituente del clinker di Portland) viene sostituita dalla fase alinite, un silicato di calcio ad alta basicità, contenente cloro.

Vengono discusse le modalità di produzione, la composizione, le caratteristiche chimiche e di comportamento tecnico del cemento ricco di alinite, indicando altresì la natura dei prodotti d'idratazione e le applicazioni più appropriate.

Parole chiave: Clinkers di cemento. Risparmio di energia. Cemento ricco di alinite.

Summary - The different ways for energy saving in cement clinkers manufacture are examined.

Considering that in cement clinker formation the greater part of energy is consumed in the dissociation of the calcium carbonate in the feed material and in maintaining the burning temperature at 1450°C, the possibilities of lowering the calcium carbonate content, together with the burning temperature, are analysed.

It is pointed out that a clinker in which alinite phase, a calcium oxy-chloro-alumino silicate, takes the place of alite phase (tricalcium silicate, the main component of Portland clinker) can be manufactured with a saving in fuel and electric energy of up to 30%.

Production way, composition, chemical characteristics, technical behaviour, hydration products and suitable utilization of alinite cement are discussed.

Key words. Cement clinkers. Energy saving. Alinite cement.

L'esaurimento di materie prime, così come di combustibili fossili, e l'inquinamento atmosferico, costituiscono, com'è noto, i problemi più seri con i quali deve confrontarsi l'umanità.

In questo contesto trova un posto speciale la produzione di cemento, uno dei maggiori utilizzatori di materie prime e di energia ed uno dei più forti contributori di immissioni in atmosfera di anidride carbonica, il più temibile "gas serra".

È noto infatti che la produzione di cemento richiede un impiego relativamente alto di energia, rappresentato, in particolare, dal combustibile richiesto per la cottura del clinker e dall'energia elettrica necessaria alla sua macinazione.

In considerazione di ciò, da tempo l'industria del cemento ha fatto continue ricerche per ridurre il consumo di energia ed ha favorito la produzione di cementi di miscela, di cementi, cioè, ottenibili per "taglio" del cemento Portland con prodotti dotati di proprietà idrauliche latenti (scorie d'alto forno), o con pozzolane naturali e prodotti a comportamento "pozzolanico" (ceneri volanti).

Essi costituiscono sottoprodotti industriali, oppure rocce naturali, che richiedono solo energia termica per la loro essiccazione. Consentono inoltre una sensibile riduzione delle emissioni di anidride carbonica, poiché rimpiazzano consistenti aliquote di clinker.

Ciò nondimeno, a partire dall'anno 1973, che ha segnato un brusco aumento dei costi dell'energia, la ricerca applicata si è impegnata a studiare anche altre vie di abbassamento dei consumi di energia per la produzione di clinkers, cercando di portarli a valori inferiori a quelli caratteristici della odierna produzione di cemento (circa 740 Kcal/Kg di clinker prodotto).

È possibile conseguire questa finalità: diminuendo il contenuto di carbonato di calcio della miscela generatrice; impiegando fondenti; producendo cementi con forme di belite (silicato bicalcico) più reattive; sostituendo l'alite (silicato tricalcico) con l'alinite (silicato di calcio ad alta basicità, contenente cloro).

È noto che nella produzione di clinker di cemento la maggior parte dell'energia viene consumata nella dissociazione del carbonato di calcio della miscela di partenza e nel mantenimento della temperatura del forno rotativo intorno a 1450°C. Il consumo di combustibile può pertanto esser ridotto diminuendo il contenuto di carbonato di calcio e/o abbassando la temperatura necessaria alla formazione del clinker.

Se si diminuisce il contenuto di carbonato di calcio della miscela generatrice, cresce il contenuto di silicato bicalcico del clinker a spese del silicato tricalcico. In tal caso, per innalzare la resistenza alle brevi stagionature, è necessario raffreddare il clinker assai rapidamente, ciò che limita il risparmio di energia a seguito delle perdite di calore che si determinano nel corso del processo di refrigerazione (1).

Se si aggiungono agenti mineralizzatori o fondenti, la temperatura di cottura del clinker può esser mantenuta intorno a 1300°C, ma il risparmio di energia per questa via difficilmente supera il 5%.

Un risparmio di energia dell'ordine del 30% può invece esser conseguito con la produzione di un clinker ricco di alinite.

L'alinite è un ossi-cloro-allumosilicato di calcio simile all'alite, il principale costituente del cemento Portland e quello cui è affidata la resistenza alle brevi stagionature.

Mentre nell'alite i cationi Ca^{+2} sono controbilanciati dagli anioni SiO_4^{-4} ed O^{-2} , la struttura dell'alinite consta di cationi Ca^{+2} ed Mg^{+2} controbilanciati da anioni SiO_4^{-4} , AlO_4^{-5} , O^{-2} e Cl^- .

Ricerche cristallografiche hanno posto in luce che principale caratteristica dell'alinite è la peculiare posizione degli atomi di cloro, circondati da otto atomi di calcio (2). Essa è isostrutturale con la giasmundite (3) un minerale (solfosilicato) che non possiede alcuna attività idraulica, al quale è stata attribuita la formula: $\text{Ca}_{22} [\text{SiO}_4]_8 \cdot \text{O}_4 \text{S}_2$, mentre all'alinite è stata attribuita la formula seguente: $\text{Ca}_{21} \text{Mg}[(\text{Si}_{0.75} \text{Al}_{0.25})\text{O}_4]_8 \cdot \text{O}_4 \text{Cl}_2$.

In accordo con tale formula, il clinker ricco di alinite reca 3-4% in peso di cloruro. La letteratura riporta normalmente un contenuto del 3% in peso di cloro. Ben è vero che il contenuto di cloro vaporizza nel processo di cottura del clinker e che esistono metodologie atte a favorire il suo allontanamento, ma è ben difficile che il tenore di cloro possa scendere intorno all'1% in peso. Ciò rende il cemento ricco di alinite poco indicato per la realizzazione di strutture in cemento armato, per i fenomeni di corrosione che possono riguardare i ferri d'armatura.

Il cemento ricco di alinite è stato messo a punto nell'Unione Sovietica con brevetto di Noudelman nel 1977 ed è tuttora in produzione.

Il relativo clinker può esser prodotto a partire da una miscela contenente calcare, argilla, ossido di magnesio e cloruro di calcio (6-18% in peso) per trattamento termico a 1300°C . Il cloruro di calcio può in parte esse sostituito da quello di sodio o di potassio. È pertanto presumibile che sia sufficiente il 10% in peso di cloruro di calcio. Il quantitativo richiesto si aggira pertanto intorno a 150 Kg per tonnellata di clinker prodotto (1).

Come costituenti della miscela generatrice possono esser utilizzati differenti sottoprodotti industriali, quali: ceneri volanti, rifiuti di acciaieria (4), polvere di magnesite, residui municipali che recano notevoli quantità di cloro.

Nel corso della cottura il cloruro di calcio fonde intorno a 780°C ed accelera la velocità del processo di clinkerizzazione.

Grazie alla più bassa temperatura di cottura, al minor contenuto di carbonato di calcio della miscela generatrice ed alle minori perdite di calore, il consumo d'energia si riduce del 30% rispetto a quello relativo al cemento Portland classico ed il costo di produzione si abbassa del 10-12%.

Anche più basso risulta il consumo di energia elettrica, in virtù della migliore macinabilità del clinker ricco di alinite.

La sua composizione chimica è generalmente compresa nei limiti seguenti:

Alinite 50-80%; Belite 10-40%; cloroalluminato di calcio 5-10%; Allumino ferrito di calcio 2-10%.

Per la corretta formulazione della miscela generatrice si impiega l'indice di calce (IC), definito come:

$$IC = \frac{CaO}{SiO_2 + Al_2O_3 + Fe_2O_3}$$

che dovrebbe esser compreso fra 1.5 e 1.8 (4). L'aggiunta ottimale di cloruro di calcio alla miscela generatrice si aggira intorno all'8% (4).

Nel corso del processo di clinkerizzazione viene eliminata un'aliquota di cloro, con conseguente diminuzione nel clinker prodotto.

Il clinker può anche recare limitate quantità di belinite, una fase contenente cloro simile alla belite, così come clorosilicato di calcio, ferrito di calcio, periclasio, alite e gamma-silicato bicalcico.

Se si innalza la temperatura del trattamento termico fino a 1370°C o più, un'aliquota dell'alinite, neoformata a più bassa temperatura, si converte in alite, con conseguente aumento di cloroalluminato (5).

Per regolare la presa del cemento ricco di alinite non è necessario aggiungere gesso. Se, però, se ne aggiunge, cresce la resistenza a breve e lungo termine, di pari passo con la quantità aggiunta (4).

L'alinite esibisce un'alta attività idraulica, superiore a quella dell'alite ed ha luogo senza periodo d'induzione. Reagisce con l'acqua allo stesso modo dell'alite, forma prodotti d'idratazione simili ed esibisce resistenza comparabile. Può anche avere resistenza più alta di quella dell'alite, per l'effetto accelerante del contenuto di cloro.

La velocità d'idratazione non è influenzata dal rapporto SiO_4/AlO_4 nel reticolo cristallino (6). È stato osservato, però, che l'alinite priva di impurezze è più reattiva di quella del clinker, la quale reca discrete quantità di ioni estranei (7).

È stato anche osservato che l'idratazione dell'alinite è decisamente accelerata dalla presenza di ioni cloro liberi, nella fase liquida (6).

Il cemento ricco di alinite esibisce una rapida idratazione iniziale, superiore a quella del cemento Portland.

I prodotti d'idratazione risultano (7): una fase C-S-H (silicato di calcio idrato) simile a quella che si neoforma per idratazione del cemento Portland; $Ca(OH)_2$; un sale di Friedel ($3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot CaCl_2 \cdot 10H_2O$) in cui un'aliquota di cloruro di calcio è sostituita da idrossido o da carbonato di calcio che si forma per idratazione del cloroalluminato di calcio e della ferrite, dove Al^{+3} può esser parzialmente sostituito da Fe^{+3} ; una fase Aft ($3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 3CaSO_4 \cdot 32 H_2O$) che

si forma per effetto di simultanea macinazione di clinker ricco di alinite e gesso e si converte in monosolfato verso la fine del processo d'idratazione.

In modeste quantità possono anche esser presenti gli alluminati monocalcico e tricalcico.

Una consistente aliquota del cloro originariamente presente nel clinker ricco di alinite si lega al sale di Friedel nel corso dell'idratazione.

È stato anche osservato (7) che la fase C-S-H di neoformazione può incorporare fino al 3% di cloro, probabilmente per adsorbimento, e che una consistente aliquota di ioni Cl^- può passare nella fase liquida, ciò che decisamente accelera l'idratazione dell'alinite.

La diminuzione della concentrazione di cloro nei primi stadi del processo d'idratazione è stata attribuita alla combinazione di ioni cloro con il sale di Friedel ed il successivo aumento, osservato fra quattro e sette giorni, all'idratazione dell'alinite, nel corso della quale gli ioni cloro diffondono verso la superficie dei provini e si accomodano nella soluzione dei pori.

L'alcalinità della soluzione dei pori delle paste di cemento ricco di alinite si aggira intorno ad un pH prossimo ad 11 (8). Risulta pertanto nettamente più bassa di quella che si riscontra normalmente nelle paste di cemento Portland ordinario ($\text{pH} = 12.5-13.5$), con possibili ricadute sull'integrità del tondino di acciaio annegato nel calcestruzzo.

I dati riguardanti la possibile corrosione delle armature di acciaio annegate nel calcestruzzo di cemento ricco di alinite non sono però concordanti.

Alcune indagini hanno posto in luce una notevole corrosione dell'acciaio (1), mentre in uno studio pubblicato di recente (8) viene affermato che provini di cemento ricco di alinite, esposti in continuo all'azione di acqua di rubinetto per la durata di 12 mesi, hanno mostrato adeguata protezione contro la corrosione dell'armatura.

Lo sviluppo della resistenza iniziale del cemento ricco di alinite è simile, od anche superiore, a quello del cemento Portland ordinario, ma i valori a ventotto giorni sono più bassi.

Sono stati recentemente sintetizzati, sulla base della formula riportata in letteratura, due tipi di cementi ricchi di alinite: Mg-alinite e Zn-alinite. È stato osservato che il primo ha una velocità d'idratazione paragonabile a quella del cemento Portland ordinario, mentre il secondo mostra una cinetica d'idratazione più veloce (10).

I valori di resistenza crescono con un indice di calce fra 1.5 ed 1.8 e con aggiunta di gesso al prodotto finito (4). La resistenza può anche esser incrementata mediante miscela con cemento Portland o con cemento d'alto forno (9).

Un cemento ricco di alinite può anche esser preparato utilizzando prodotti municipali inceneriti che, in generale, contengono notevoli quantità di cloro e raramente possono esser impiegati per altre finalità. Un simile cemento viene denominato ECOCEMENTO e costituirà oggetto di una Nota successiva.

Un cemento ricco di alinite è stato prodotto in URSS per addizione del 6-25% di CaCl_2 ad un clinker di Portland ordinario e successiva cottura a 1150°C (11). L'alinite può anche essere sintetizzata per trattamento termico di una miscela di rifiuti industriali (scorie della produzione del rame, ceneri di rifiuti solidi urbani, calcite finemente macinata) (11).

Analogo al cemento ricco di alinite è quello ricco di fluoroalinite ($19\text{CaO}\cdot 7\text{SiO}_2\cdot \text{CaF}_2$) (12).

Esso può esser preparato per riscaldamento, alla temperatura di $950-1100^\circ\text{C}$, di un'appropriata miscela generatrice, contenente 5-8% in peso di spato fluore. Il relativo clinker reca 35-80% in peso di fluoralinite. Le altre fasi presenti possono essere: C_3S , C_2S , C_{11}A_7 , CaF_2 e C_4AF .

Tale cemento non provoca fenomeni di corrosione delle armature di acciaio del relativo calcestruzzo ed in questo si diversifica nettamente da quello ricco di alinite.

Conclusioni

In generale, i cementi prodotti con clinkers a ridotto consumo di energia, induriscono con una velocità minore di quella del cemento Portland ordinario. I relativi calcestruzzi devono pertanto esser mantenuti umidi per durate di tempo decisamente più lunghe rispetto a quelle di cementi prodotti con ordinario consumo d'energia. Benché raggiungano la resistenza prevista, non si registra bassa permeabilità negli strati superficiali delle strutture, un fattore essenziale per la durata dei manufatti.

I cementi ricchi di alinite servono bene per manufatti che non richiedano armatura di acciaio. Devono tuttora esser sconsigliati per la realizzazione di strutture in cemento armato, a seguito dei dubbi che sussistono sulla possibile corrosione dei ferri d'armatura ad opera del cloro che contengono.

Se ne deduce che l'alternativa di produrre cementi di aggiunta (13) resta tuttora l'opzione più valida per conseguire il risparmio di energia nella produzione di cemento.

Bibliografia

- (1) Locher F.W. Low energy clinker. Proc. 8th ICCC, I, 57-67. Rio de Janeiro (1986).
- (2) Noudelman B.I., Gadaev A.I. Aspects physico-chimiques de la cristallisation a basse temperature dans le bain fondu du sel. Proc. 8th ICCC, II, 347-351. Rio de Janeiro (1986).
- (3) Bikbaou M.Y. Formation, crystal chemistry and properties of alinite and jasmundite. Proc. 8th ICCC, II, 352-376 (1986).

- (4) Pradip A., Kapur P.C. Production and properties of alinite cements from steel plant waste. *Cement Concr. Res.*, 20, 15-24 (1990).
- (5) Uchikawa H., Obana H. Ecocement- frontier and recycling of urban composite waste. *Journ. Res., Chichibu Onoda Cement Corp.* 47, 131, 153-162 (1996).
Odler Ivan. *Special inorganic cements*. F.&FN Spon. London. 97-104 (2000).
- (6) Neubauer J., Pollmann H. Alinite-chemical composition, solid solution and hydration behaviour. *Cement Concr. Res.*, 24, 1413-1422 (1994).
- (7) Ji L., Ren X., Su H. Effect of chloride on hydration properties of alinite cement. *Proc. 10th ICCC*, 2ii 030. Goteborg (1997).
- (8) Kostogloudis G.C., Kalogridis D., Ftikos C., Malami C., Georgali B., Kaloidas V. Comparative investigation of corrosion resistance of steel reinforcement in Alinite and Portland cement mortars. *Cement Concr. Res.*, 28, 995-1010 (1998).
- (9) Tsuchida Y. Hydration and characterization of alinite rich clinker burnt at different temperatures. *Journ. Res., Chichibu Onoda Cement Corp.* 47, 130, 62-72 (1996).
- (10) Kim Y. M., Lee J.M., Hong S.H. Study of alinite cement hydration by impedance spectroscopy. *Cemet Concr. Res.*, 33, 299-304 (2003).
- (11) Tewelde M., Pöllmann H. Synthesis of alinite-cement out of copperslag and municipal-solid-waste-incineration (MSWI) residues. *Proc. 11th ICCC*, 1211-1215, Durban (2003).
- (12) Ludwig U., Urbonas L. Synthesis and reactivity of fluoralinites and fluoralinite cement. *Cement-Kalk-Gips*, 46, 568-572 (1993).
- (13) Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Note I, II, III: *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli*, 67, 101-109; 143-147; 149-155 (2000).

Some properties of the first eigenvalue of nonlinear weighted problems and applications

Nota di Angela Alberico¹

Presentata dal Socio Angelo Alvino
(Adunanza del 2 Aprile 2004)

Key words: Nonlinear weighted problems - First eigenvalue - Existence and non-existence of solutions

Abstract: We prove some properties of the first eigenvalue of the problem

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = -\operatorname{div} \left((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u \right) = \lambda V(x) |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

In particular, the first eigenvalue is shown to be isolated. Moreover, existence and non existence results of solutions in $W_0^{1,p}(\Omega)$ for nonlinear weighted equations with exponential growth are obtained.

Riassunto: In questa nota si dimostrano alcune proprietà del primo autovalore del problema

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = -\operatorname{div} \left((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u \right) = \lambda V(x) |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

In particolare, si prova che il primo autovalore è isolato. Inoltre, si ottengono risultati di esistenza e non esistenza di soluzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per equazioni con crescita esponenziale.

¹Istituto per le Applicazioni del Calcolo "M. Picone" C.N.R. - Sezione di Napoli
Via P. Castellino 111 - 80131 Napoli
angela.alberico@na.iac.cnr.it

1 Introduction

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ and let $1 < p < +\infty$. We are concerned with the nonlinear eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = -\operatorname{div} \left((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u \right) = \lambda V(x) |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Here, $A = \{a_{ij}(x)\}_{i,j}$ is a symmetric matrix with measurable bounded coefficients satisfying the ellipticity condition

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2, \quad (1.2)$$

for a.e. x in Ω , and for every ξ in $\mathbb{R}^N$, λ is a positive number, and V is a nonnegative function such that

$$\begin{cases} \operatorname{meas} \{x \in \Omega : V(x) > 0\} \neq 0 \\ V \in L^q(\Omega), \end{cases} \quad \text{where } \begin{cases} q > N/p & \text{for } 1 < p < N \\ q > 1 & \text{for } p \geq N. \end{cases} \quad (1.3)$$

Several special cases of problem (1.1) have been considered in literature. The case where the operator $\mathcal{A}_p$ is the p -Laplacian has been extensively investigated - see, e.g., [AP], [AFV], [AFT], [An1], [An2], [L1], [L2], [LT], [Sa], [Th].

In particular, in [AP] the first eigenvalue λ_1 of (1.1) for the p -Laplacian was shown to be simple and isolated when $V(x) \equiv 1$; the same conclusion was achieved in [An1]-[An2] for $V \in L^\infty$. The study of problem (1.1) with non necessarily constant $A(x)$ was initiated in [AFT] for $V(x) \equiv 1$, and continued in [AFV], where the case of non constant V is taken into account: in both these papers, the first eigenvalue λ_1 of (1.1) is proven to be positive and simple.

In this note, we show that λ_1 is isolated. We also establish some results about existence and non existence of solutions in $W_0^{1,p}(\Omega)$ to the problem

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = -\operatorname{div} \left((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u \right) = \lambda V(x) e^u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

More precisely, we prove that, if λ is small enough, there exists at least one solution to problem (1.4), whereas if λ is too large, problem (1.4) admits no solution. This last result, whose proof exploits the information that the first eigenvalue of (1.1) is isolated, can be regarded as an extension of former

results contained in [Bd], [Fu], [Gu], [GMP], [JL], [MP1] and [MP2] for linear operator, and in [AP], [GPP], [GP], in the nonlinear case.

Let us mention that problem (1.4) arises in several mathematical models. For instance, in the case where $\mathcal{A}_p$ is the Laplacian and $V(x) \equiv 1$, problem (1.4) appears in the study of stellar structure (see [Ch]) and in Riemannian geometry (see [KW]). When $\mathcal{A}_p$ is the p -Laplacian, with $p \neq 2$ and $V(x) \equiv 1$, it describes a model for nonlinear diffusion.

2 Main results

A function $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ is called an *eigenfunction* of problem (1.1) if

$$\int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} (A \nabla u, \nabla \phi) dx = \lambda \int_{\Omega} V |u|^{p-2} u \phi dx, \quad (2.1)$$

for all $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. The corresponding real number λ is called an *eigenvalue* of problem (1.1).

It is well known that the first eigenvalue λ_1 is the minimum of the Rayleigh quotient

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} (A \nabla v, \nabla v)^{p/2} dx}{\int_{\Omega} V |v|^p dx}. \quad (2.2)$$

Our aim is to prove that λ_1 is isolated. For convenience, we recall the following result (see [AFT]).

Lemma 2.1 *Let $A = \{a_{ij}\}$ be a symmetric matrix such that $a_{ij} \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$. Then we have:*

(i) *if $p \geq 2$:*

$$(A \xi_2, \xi_2)^{p/2} \geq (A \xi_1, \xi_1)^{p/2} + p(A \xi_1, \xi_1)^{(p-2)/2} (A \xi_1, \xi_2 - \xi_1) + \frac{(A(\xi_2 - \xi_1), \xi_2 - \xi_1)^{p/2}}{2^{p-1} - 1},$$

for every $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$;

(ii) *if $1 < p < 2$:*

$$(A \xi_2, \xi_2)^{p/2} \geq (A \xi_1, \xi_1)^{p/2} + p(A \xi_1, \xi_1)^{(p-2)/2} (A \xi_1, \xi_2 - \xi_1) + c(p) \frac{(A(\xi_2 - \xi_1), \xi_2 - \xi_1)}{(\sqrt{(A \xi_1, \xi_1)} + \sqrt{(A \xi_2, \xi_2)})^{2-p}},$$

for every $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, where $c(p)$ is a constant which depends only on p .

Proposition 2.2 *If v is an eigenfunction corresponding to an eigenvalue $\lambda \neq \lambda_1$, then v changes his sign in Ω . Moreover*

$$\min\{|\Omega^+|, |\Omega^-|\} \geq (C\lambda \|V\|_q)^\sigma, \quad (2.4)$$

where $\Omega^+ = \{x \in \Omega: v(x) > 0\}$, $\Omega^- = \{x \in \Omega: v(x) < 0\}$, $\sigma = -2q'$ if $p \geq N$, $\sigma = -Nq/(pq - N)$ if $1 < p < N$ and C is a positive constant.

Proof: Let u be a positive eigenfunction corresponding to λ_1 , such that

$$\int_{\Omega} (A\nabla u, \nabla u)^{p/2} dx = 1. \quad (2.5)$$

It is well known that the eigenfunction corresponding to λ_1 does not change his sign, so we can suppose $u > 0$. Then, we consider an eigenfunction v corresponding to λ , such that

$$\int_{\Omega} (A\nabla v, \nabla v)^{p/2} dx = 1, \quad (2.6)$$

and suppose, by contradiction, that v does not change his sign. To fix ideas, assume that v is a positive function. We consider, for $\epsilon > 0$, the functional $I_{\epsilon}(u, v)$ defined as

$$I_{\epsilon}(u, v) = \langle -\mathcal{A}_p u, \frac{u_{\epsilon}^p - v_{\epsilon}^p}{u_{\epsilon}^{p-1}} \rangle + \langle -\mathcal{A}_p v, \frac{v_{\epsilon}^p - u_{\epsilon}^p}{v_{\epsilon}^{p-1}} \rangle.$$

Using Lemma 2.1 (see also [L1], [AFT], [AFV]), we obtain

$$I_{\epsilon}(u, v) \geq 0.$$

On the other hand, by (2.1), we have

$$\begin{aligned} I_{\epsilon}(u, v) &= \lambda_1 \int_{\Omega} V u^{p-1} \left(\frac{u_{\epsilon}^p - v_{\epsilon}^p}{u_{\epsilon}^{p-1}} \right) dx + \lambda \int_{\Omega} V v^{p-1} \left(\frac{v_{\epsilon}^p - u_{\epsilon}^p}{v_{\epsilon}^{p-1}} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\lambda_1 \left(\frac{u^{p-1}}{u_{\epsilon}^{p-1}} \right) - \lambda \left(\frac{v^{p-1}}{v_{\epsilon}^{p-1}} \right) \right) V (u_{\epsilon}^p - v_{\epsilon}^p) dx. \end{aligned}$$

Passing to the limit as ϵ goes to 0, yields

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\epsilon}(u, v) = (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} V (u^p - v^p) dx.$$

Using (2.1) and the assumption (2.5), we can see that

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} V(u^p - v^p) dx = \\ & = (\lambda_1 - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla u)^{p/2} dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (A \nabla v, \nabla v)^{p/2} dx \right) = \\ & = (\lambda_1 - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda} \right) < 0, \end{aligned}$$

a contradiction.

Now, we prove estimate (2.4). Consider Ω^+ (the same argument applies to Ω^-). Denote by v^+ the positive part of v , i.e. $v^+(x) = \max\{v(x), 0\}$. By Hölder's inequality, we have

$$\int_{\Omega} (A \nabla v^+, \nabla v^+)^{p/2} dx = \lambda \int_{\Omega} V (v^+)^p dx \leq \lambda \|V\|_q \|v^+\|_p^p |\Omega^+|^{1/\beta},$$

where $\frac{1}{q} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

If $1 < p < N$, we take $\alpha = \frac{N}{N-p}$, $\beta = \frac{Nq}{(pq-N)}$ and, by (1.2) and Sobolev's imbedding theorem, it follows that

$$\|\nabla v^+\|_p^p \leq \lambda \|V\|_q \|v^+\|_{p^*}^p |\Omega^+|^{\frac{Nq}{(pq-N)}} \leq C\lambda \|V\|_q \|\nabla v^+\|_p^p |\Omega^+|^{\frac{Nq}{(pq-N)}},$$

where $p^* = Np/(N-p)$, the Sobolev conjugate of p .

If $p \geq N$, we take $\alpha = \beta = 2q'$ and, using again Sobolev's imbedding theorem,

$$\begin{aligned} \|\nabla v^+\|_p^p & \leq \lambda \|V\|_q \|v^+\|_{2q'p}^p |\Omega^+|^{\frac{1}{2q'}} \leq \\ & \leq C\lambda \|V\|_q \|\nabla v^+\|_p^p |\Omega^+|^{\frac{1}{2q'}}. \end{aligned}$$

Hence, in both cases,

$$|\Omega^+| \geq (C\lambda \|V\|_q)^{\beta},$$

with $\beta = \frac{Nq}{pq-N}$, for $1 < p < N$, $\beta = 2q'$ for $p \geq N$. ■

The next lemma is a consequence of the following inequality, which in turn can be easily deduced from Lemma 2.1,

$$\left((A\xi, \xi)^{(p-2)/2} A\xi - (A\eta, \eta)^{(p-2)/2} A\eta, \xi - \eta \right) \geq \begin{cases} C_p |\xi - \eta|^p & \text{if } p \geq 2 \\ C_p \frac{|\xi - \eta|^2}{(|\xi| + |\eta|)^{(2-p)}} & \text{if } 1 < p < 2, \end{cases} \quad (2.15)$$

for every $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$. Here, C_p is a constant depending only p .

Lemma 2.3 Assume that $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfy

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u_i = f_i & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $f_i \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $i = 1, 2$. Then

$$\int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx \geq \begin{cases} C_p \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx & \text{if } p \geq 2 \\ C_p \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)}} dx & \text{if } 1 < p < 2, \end{cases}$$

where C_p is the constant appearing in (2.15).

Remark 2.4 Notice that, as a consequence of Lemma 2.3,

if $p \geq 2$,

$$C_p \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx \leq \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)};$$

if $1 < p < 2$,

$$C_p \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq (\|\nabla u_1\|_p^p + \|\nabla u_2\|_p^p)^{\frac{(2-p)}{p}} \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)},$$

where C_p is the constant in (2.15).

Theorem 2.5 Let λ_1 be the first eigenvalue of the problem (1.1). Then, λ_1 is isolated, that is, λ_1 is the unique eigenvalue in $[0, a]$, for some $a > \lambda_1$.

Proof: Our approach is related to the method of [An1], [An2] and [AP]. Let $\lambda \geq 0$ be an eigenvalue of (1.1) and let v be a corresponding eigenfunction. By (2.2), it follows that $\lambda_1 \leq \lambda$ and so λ_1 is left-isolated.

To prove that λ_1 is right-isolated, we argue by contradiction. We suppose that there exists a sequence of eigenvalues $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, such that $\lambda_k \neq \lambda_1$ and $\lambda_k \rightarrow \lambda_1$. Let $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be the corresponding sequence of eigenfunctions such that

$$\int_{\Omega} (A \nabla u_k, \nabla u_k)^{p/2} dx = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

By (1.2) and (2.19), there exists a subsequence, denoted again by $(u_k)_k$ and a function $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{weakly in } W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_k \longrightarrow u & \text{strongly in } L^p(\Omega), \\ u_k(x) \longrightarrow u(x) & \text{a.e. in } \Omega. \end{cases}$$

Our next aim is to show that u is the eigenfunction corresponding to λ_1 such that

$$\int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla u)^{p/2} dx = 1. \quad (2.21)$$

First of all, we observe that $\mathcal{A}_p$ is a continuous and one-to-one operator from $W_0^{1,p}(\Omega)$ into $W^{-1,p'}(\Omega)$ and so is its inverse operator $\mathcal{A}_p^{-1}$, defined from $W^{-1,p'}(\Omega)$ into $W_0^{1,p}(\Omega)$ (see, for example, [L]). Thus,

$$u_k = -\mathcal{A}_p^{-1}(\lambda_k V |u_k|^{p-2} u_k).$$

By Vitali's theorem, we have

$$\lambda_k V |u_k|^{p-2} u_k \longrightarrow \lambda_1 V |u|^{p-2} u,$$

strongly in $L^1(\Omega)$ if $p \geq N$, in $L^{p^*}(\Omega)$ if $1 < p < N$ and then in $W^{-1,p'}(\Omega)$, for all $1 < p < +\infty$.

The continuity property of $\mathcal{A}_p^{-1}$ implies that

$$u_k \longrightarrow u, \quad \text{strongly in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Hence, u is an eigenfunction of (1.1), corresponding to λ_1 . Using Vitali's theorem, again, we have

$$(A \nabla u_k, \nabla u_k)^{p/2} \longrightarrow (A \nabla u, \nabla u)^{p/2}, \quad \text{strongly in } L^1(\Omega)$$

whence (2.21) follows.

Now, we suppose $u > 0$ in Ω and so we can say that for every $\epsilon > 0$ there exist $\eta_\epsilon > 0$ and $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ such that

$$|\Omega \setminus \Omega_\epsilon| \leq \epsilon/2, \quad \text{and } u(x) \geq 2\eta_\epsilon, \quad (2.26)$$

for every $x \in \Omega_\epsilon$. Moreover, by the pointwise convergence of u_k , applying the Egorov's Theorem, we can say that u_k converges uniformly to u outside a set of arbitrarily small measure, namely, for every $\epsilon > 0$ there exists $\Omega'_\epsilon \subset \Omega$ such that

$$|\Omega \setminus \Omega'_\epsilon| \leq \epsilon/2, \quad u_k \longrightarrow u \quad \text{uniformly on } \Omega'_\epsilon.$$

Thus, fixed $\eta_\epsilon > 0$, there exists $N_\epsilon > 0$ such that

$$|u_k(x) - u(x)| \leq \eta_\epsilon, \quad (2.28)$$

for every $k > N_\epsilon$ and for every $x \in \Omega'_\epsilon$.

Finally, by (2.26) and (2.28), we obtain

$$u_k(x) > \eta_\epsilon > 0 \quad \forall k > N_\epsilon,$$

for every $k > N_\epsilon$ and for every $x \in \Omega'_\epsilon \cap \Omega_\epsilon$.

In particular, for every $k > N_\epsilon$, we have $\Omega_\epsilon \cap \Omega'_\epsilon \subset \Omega_k^+$ and then

$$|\Omega_k^+| \geq |\Omega_\epsilon \cap \Omega'_\epsilon| \geq |\Omega| - (|\Omega \setminus \Omega'_\epsilon| + |\Omega \setminus \Omega_\epsilon|) \geq |\Omega| - \epsilon,$$

where $\Omega_k^+ = \{x \in \Omega : u_k(x) > 0\}$. By Proposition 2.1, it follows

$$|\Omega_k^-|, |\Omega_k^+| \geq \left(C \left(\max_k \lambda_k \right) \|V\|_q \right)^\sigma \equiv K,$$

If we choose $\epsilon = K/2$, we obtain

$$|\Omega| = |\Omega_k^-| + |\Omega_k^+| \geq |\Omega| - \epsilon + K = |\Omega| + \epsilon > |\Omega|,$$

a contradiction. ■

3 Applications

In this section, we deal with existence and nonexistence of solutions to the following nonlinear problem

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = \lambda V(x) e^u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

where Ω , p , A and V are as in the previous sections. Weak solutions to (3.1) are defined similarly as (2.1).

First, we give an application of Theorem 2.1. Using the information that the first eigenvalue of (1.1) is isolated and the following weak comparison principle, we will prove a nonexistence result for solutions to (3.1).

Proposition 3.1 *Consider the problems*

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

and

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p v = g & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

where $1 < p < +\infty$, $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$ and the operator $\mathcal{A}_p$ is as in (2.1). If $f \geq g$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$, then $u \geq v$ in Ω .

Proof: Choosing $(u - v)^-$ as test function in the definition of the solution to problems (3.2) and (3.3), one gets

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} (A \nabla u, \nabla [(u - v)^-]) dx = \int_{\Omega} f [(u - v)^-] dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} g [(u - v)^-] dx = \int_{\Omega} (A \nabla v, \nabla v)^{(p-2)/2} (A \nabla v, \nabla [(u - v)^-]) dx. \end{aligned}$$

Since

$$(u - v)^- = \begin{cases} 0 & \text{if } u \geq v \\ -(u - v) & \text{if } u < v, \end{cases}$$

we have

$$\int_{\{u-v < 0\}} ((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u - (A \nabla v, \nabla v)^{(p-2)/2} A \nabla v, -(\nabla u - \nabla v)) \geq 0.$$

By (2.15), we have that

$$((A \nabla u, \nabla u)^{(p-2)/2} A \nabla u - (A \nabla v, \nabla v)^{(p-2)/2} A \nabla v, -(\nabla u - \nabla v)) < 0$$

whence $|\{u - v < 0\}| = 0$, and the conclusion follows. ■

Theorem 3.2 Assume that Ω , p , A , V and λ_1 are as in section 1. If

$$\lambda > \max \left\{ \lambda_1, \lambda_1 \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \right\}, \quad (3.8)$$

then problem (3.1) has no solution.

Proof: Let v_1 be a positive eigenfunction corresponding to λ_1 , such that $\|v_1\|_{\infty} \leq 1$. Suppose, by contradiction, that there exists

$$\lambda > \max \left\{ \lambda_1, \lambda_1 \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \right\},$$

for which problem (3.1) has a solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e.

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p u = \lambda V(x) e^u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Now, take $\lambda_\epsilon = \lambda_1 + \epsilon$, with $\epsilon > 0$. By (3.8), we have

$$\lambda_\epsilon < \lambda, \quad (3.11)$$

if ϵ is sufficiently small,

$$\lambda_\epsilon x^{p-1} < \lambda e^x, \quad (3.12)$$

for every $x \geq 0$. Observing that

$$\lambda_1 V v_1^{p-1} \leq \lambda_1 V < \lambda_\epsilon V < \lambda V \leq \lambda V e^u, \quad \text{in } \Omega,$$

by Proposition 3.1, it follows that

$$v_1 \leq u, \quad \text{in } \Omega. \quad (3.14)$$

Let us consider the solution v_2 of

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p v_2 = \lambda_\epsilon V(x) v_1^{p-1} & \text{in } \Omega \\ v_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

By (3.11), (3.12) and (3.14), we have

$$\lambda_\epsilon V v_1^{p-1} < \lambda V e^{v_1} \leq \lambda V e^u,$$

$$\lambda_1 V v_1^{p-1} \leq \lambda_\epsilon V v_1^{p-1}$$

and so, using again the weak comparison principle, we get

$$v_1 \leq v_2 \leq u, \quad \text{in } \Omega.$$

More in general, we consider the problems

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p v_k = \lambda_\epsilon V(x) v_{k-1}^{p-1} & \text{in } \Omega \\ v_k = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.19)$$

By iterating, we obtain an increasing sequence $\{v_k\}_k$ formed by the solutions of the problems (3.19), such that

$$v_1 \leq \dots \leq v_k \leq v_{k-1} \leq \dots \leq u, \quad \text{in } \Omega.$$

Passing to the limit as k goes to $+\infty$, we have a solution $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ of the problem

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p w = \lambda_\epsilon V(x) w^{p-1} & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

This is absurd for ϵ small enough, because λ_1 is isolated by Theorem 2.1. ■

Now, we show how by simple arguments one can obtain existence result of solution of (3.1). We begin with the following result (for the proof, see, for example, [T] or [AP]).

Lemma 3.3 *Let $B_\delta = \{\phi \in C(\Omega) : |\phi| < \delta, \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $\delta > 0$. Let $F_\lambda : B_\delta \rightarrow L^\infty(\Omega)$ defined by $F_\lambda(\phi) = \psi$, where ψ is the solution of the following problem*

$$\begin{cases} -\mathcal{A}_p \psi = \lambda V(x) e^\phi & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Then

$$\|\psi\|_\infty \leq C(\lambda e^\delta \|V\|_q)^\gamma,$$

where $C = C(p, N, \Omega)$ and $\gamma > 0$.

Now, using Lemma 3.1 and Lemma 2.1, we can prove the existence theorem.

Theorem 3.4 *If λ is small enough, then there exists one solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ of the problem (3.1).*

Proof: By Lemma 3.1 it follows that, for λ small enough, F_λ applies B_δ to itself. Moreover, applying Lemma 2.1 to $\psi_1 = F_\lambda \phi_1$ and $\psi_2 = F_\lambda \phi_2$, where $\phi_1, \phi_2 \in B_\delta$, we have

$$\gamma_0 \int_\Omega |\nabla \psi_1 - \nabla \psi_2|^p dx \leq \lambda e^\delta \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \|V\|_q |\Omega|^{1/q'},$$

with $p \geq 2, \gamma_0(p) > 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_\Omega |\nabla \psi_1 - \nabla \psi_2|^p dx &\leq \lambda e^\delta \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty^{p/2} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty^{p/2} \times \\ &\times (\|\psi_1\|_\infty + \|\psi_2\|_\infty)^{(2-p)/2} \|V\|_q |\Omega|^{1/q'}, \end{aligned}$$

with $1 < p < 2, \gamma_1(p) > 0$.

Then, by Stampacchia's method

$$\|F_\lambda \phi_1 - F_\lambda \phi_2\|_\infty = \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \leq C(p, N, \Omega, \|V\|_q) (\lambda e^\delta)^{\gamma(p)} \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty,$$

with $\gamma(p) > 0$. This means that, for λ small enough, F_λ is a contractive and theorem follows by Banach-Picard theorem. ■

References

- [AP] Aguilar Crespo, J. A. and Peral Alonso, I. (1996) "On an elliptic equation with exponential growth", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **96**, 143-175.
- [AFV] Alberico, A., Ferone, A. and Volpicelli, R. (1999) "Some properties for eigenvalues and eigenfunctions of nonlinear weighted problems", *Rend. Matematica*, s.VII, **19**, 45-63.
- [AFT] Alvino, A., Ferone, V. and Trombetti, G. (1998) "On the properties of some nonlinear eigenvalues", *SIAM J. Math. Anal.*, **29**, n. 2, 437-451.
- [An1] Anane, A. "Etude des valeurs propres et de la resonance pour l'operateur p-laplacien", *Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles*.
- [An2] Anane, A. (1987) "Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **305**, 725-728.
- [Bd] Bandle, C. (1973) "Existence theorems. Qualitative results and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **49**, 241-269.
- [Ch] Chandrasekar, S. (1985) *An introduction of the study stellar structure*, Dover Publ. Inc.
- [FK] Frank-Kamenetskii, D. A. (1969) *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Plenum Press.
- [Fu] Fujita, H. (1969) "On the nonlinear equation $\Delta u + expu = 0$ and $v_t = \Delta u + expu$ ", *Bull. A.M.S.*, **75**, 132-135.
- [GMP] Gallouet, T., Mignot, F. and Puel, J. P. (1988) "Quelques re'sultats sur le problème $-\Delta u = expu$ ", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **307**, 289-292.
- [GP] Garcia Azozero, J. and Peral Alonso, I. (1992) "On a Emden-Fowler type equation", *Nonlinear Analysis T.M.A.*, **18**, n.11, 1085-1097.
- [GPP] Garcia Azozero, J., Peral Alonso, I. and Puel, J. P. (1994) "Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term", *Nonlinear Analysis T.M.A.*, **22**, n.4, 481-498.
- [Gu] Guelfand, I. M. (1963) "Some problems in the theory of quasilinear equations", *Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2)*, **29**, 295-381.

- [JL] Joseph, D. and Lundgren, T. S. (1973) "Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **49**, 241-269.
- [KW] Kazdan, J. L. and Warner, J. L. W. (1974) "Curvature functions for compact 2 - manifolds", *Ann. Math.*, **99**, 14-47.
- [LT] Lami Dozo E. J. - Touzani A., "Autovalores con peso indefinido $\mathcal{A}_p$ -laplaciano", *manuscript*.
- [L1] Lindqvist, P. (1990) "On the equation $\operatorname{div}(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**, 157-164.
- [L2] Lindqvist, P. (1993) "On non-linear Rayleigh quotients", *Pot. Anal.*, **2**, 199-218.
- [L] Lions, J. L. (1969) *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier Villars, Paris.
- [MP1] Mignot, F. and Puel, J. P. (1980) "Sur une classe de probleme non lineaire avec non linearite positive, croissante, convexe", *Communication in P.D.E.*, **5** (8), 791-836.
- [MP2] Mignot, F. and Puel, J. P. (1988) "Solution radiale singuliere de $-\Delta u = \lambda e^u$ ", *C. R. Sci. Paris, Série I*, **307**, 379-382.
- [Sa] Sakaguchi, S. (1987) "Concavity properties of soputions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (4) **14**, 403-421.
- [T] Talenti, G. (1979) "Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces", *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) **120**, 159-184.
- [Th] de Thélin, F. (1986) "Sur l' espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-laplacien", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **303**, 355-358.

A rigorous link between the L^2 -stability of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E. and the stability of the solutions to a binary system of O.D.E.

Nota di S. Rionero

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero
(Adunanza del 2 Aprile 2004)

Summary: - Via a basic peculiar Liapunov functional V (such that the sign of its derivative along the solutions is directly connected to the eigenvalues) the stability in the L^2 -norm of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E., is rigorously reduced to the stability of solutions to an analogous problem for a binary system of O.D.E.. As concerns the boundary data, Dirichlet and Neumann data are considered.

Sommario: La stabilità nella norma di L^2 delle soluzioni di un sistema binario di equazioni a derivate parziali del tipo reazione - diffusione, viene ricondotta rigorosamente a quella della stabilità di un sistema binario di equazioni differenziali ordinarie. Lo scopo è raggiunto - sia per condizioni al contorno di Dirichlet che di Neumann - attraverso la determinazione di un funzionale di Liapunov il segno della cui derivata lungo le soluzioni è connesso, in modo semplice e diretto, a quello degli autovalori.

1 Introduction

Let us consider the binary non-dimensional system of P.D.E.

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = a_1 u + a_2 v + \Delta u + f(u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \\ v_t = a_3 u + a_4 v + \Delta v + g(u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \end{cases}$$

¹Università di Napoli Federico II. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA. E-mail: rionero@unina.it

with f and g nonlinear and

$$(2) \quad \begin{cases} a_i = \text{constant}, \forall i \in [1, 2, 3, 4] \\ (u = v = 0) \Rightarrow f = g = 0 \\ u : (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R} \\ v : (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow v(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ω being a bounded domain in $\mathbb{R}^3$ with smooth boundary $\partial\Omega$. To (1) we append the Dirichlet boundary conditions

$$(3) \quad u = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,$$

or the Neumann boundary conditions ($\mathbf{n}$ being the unit outward normal to $\partial\Omega$)

$$(4) \quad \frac{du}{d\mathbf{n}} = \frac{dv}{d\mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

with the additional conditions

$$(5) \quad \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\Omega} v d\Omega = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

in the case (4). Furthermore, we denote by $\|\cdot\|$ the $L^2(\Omega)$ -norm and by $H_0^1(\Omega)$, $H_*^1(\Omega)$ the functional spaces such that

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \{\varphi^2 + (\nabla\varphi)^2 \in L^2(\Omega), \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \\ \varphi \in H_*^1(\Omega) \rightarrow \left\{ \varphi^2 + (\nabla\varphi)^2 \in L^2(\Omega), \frac{d\varphi}{d\mathbf{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \right\} \end{cases}$$

and assume that the solutions belong to $H_0^1(\Omega)$ in the case (3) and to $H_*^1(\Omega)$ in the case (4)-(5) [1]-[4]. We assume also that

$$(7) \quad \begin{cases} \|f\|^2 + \|g\|^2 \leq \mu(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1+2\varepsilon} \\ \varepsilon = \text{constant} > 0, \mu = \text{constant} > 0 \end{cases}$$

hold. To (1) we associate the binary system of O.D.E.

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = b_1\xi + b_2\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = b_3\xi + b_4\eta \end{cases}$$

with

$$(9) \quad \begin{cases} b_i = a_i - \bar{\alpha}^2 & i = 1, 4 \\ b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3 \end{cases}$$

where $\bar{\alpha}^2(\Omega)$ is the positive constant given by

$$(10) \quad \frac{1}{\bar{\alpha}^2} = \max \frac{\|\varphi\|^2}{\|\nabla\varphi\|^2}$$

respectively in $H_0^1(\Omega)$ and $H_*^1(\Omega)$, i.e. $\bar{\alpha}$ is the lowest eigenvalue of the problem

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } \Omega$$

in $H_0^1(\Omega)$ and $H_*^1(\Omega)$ respectively [5]. The aim is to connect the stability (instability) of the critical point $O \equiv (\xi = \eta = 0)$ of (8) to the stability (instability) of the critical point $O \equiv (u = v = 0)$ of (1).

2 Main Theorems

Theorem 1. *Setting*

$$(11) \quad \begin{cases} A = b_1 b_4 - b_2 b_3, & I = b_1 + b_4 \\ (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega, \\ V = \frac{1}{2} [A(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \|b_1 v - b_3 u\|^2 + \|b_2 v - b_4 u\|^2] \end{cases}$$

it turns out that

$$(12) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = A I (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \Psi$$

with

$$(13) \quad \begin{cases} \Psi = (\alpha_1 u - \alpha_3 v, \Psi_1) + (\alpha_2 v - \alpha_3 u, \Psi_2) \\ \Psi_1 = f + f^*, \quad \Psi_2 = g + g^* \\ f^* = \Delta u + \bar{\alpha}^2 u, \quad g^* = \Delta v + \bar{\alpha}^2 v \\ \alpha_1 = A + b_3^2 + b_4^2, \quad \alpha_2 = A + b_1^2 + b_2^2, \quad \alpha_3 = b_1 b_3 + b_2 b_4 \end{cases}$$

Theorem 2. *Let (7) hold and let $O \equiv (\xi = \eta = 0)$ be asymptotically stable for (8) according to*

$$(14) \quad \begin{cases} A > 0 \\ I < 0. \end{cases}$$

Then $O \equiv (u = v = 0)$ is linearly and nonlinearly asymptotically and exponentially stable, with respect to the $L^2(\Omega)$ -norm for (1).

Theorem 3. *Let (7) hold and let $O \equiv (\xi = \eta = 0)$ be unstable for (8) according to*

$$(15) \quad \begin{cases} A > 0 \\ I > 0. \end{cases}$$

Then $O \equiv (u = v = 0)$ is linearly and nonlinearly unstable, with respect to the $L^2(\Omega)$ -norm for (1).

As concerns the stability theorem 2, we limit ourselves only to show that the contribution of f^* and g^* to Ψ is nonpositive, i.e.

$$(16) \quad \Psi^* = (\alpha_1 u - \alpha_3 v, \Delta u + \bar{\alpha}^2 u) + (\alpha_2 v - \alpha_3 u, \Delta v + \bar{\alpha}^2 v) \leq 0.$$

In fact, by straightforward calculations, it follows that

$$(17) \quad \Psi^* = \begin{cases} -A[\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 - \bar{\alpha}^2(\|u\|^2 + \|v\|^2)] \\ -[\|\nabla(b_3 u - b_1 v)\|^2 + \|\nabla(b_4 u - b_2 v)\|^2] \\ -\bar{\alpha}^2(\|b_3 u - b_1 v\|^2 + \|b_4 u - b_2 v\|^2). \end{cases}$$

As concerns the instability theorem 3, in the next section we will apply (15) for obtaining instability condition for a double diffusive convection in a rotating porous medium, uniformly heated and salted from below.

3 Instability conditions for a double diffusive convection in rotating porous medium

The Darcy-Oberbeck-Boussinesq (D.O.B.) equations governing the motion of a binary porous fluid mixture bounded by two horizontal planes uniformly rotating around the vertical axis z are [6], [7], [8]

$$(18) \quad \begin{cases} \nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{g} - 2 \frac{\rho_0}{\epsilon} \underline{\omega} \times \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ A T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = k_T \Delta T \\ \epsilon C_t + \mathbf{v} \cdot \nabla C = k_C \Delta C \end{cases}$$

where $\rho_f = \rho_0[1 - \gamma_T(T - T_0) + \gamma_C(C - C_0)]$; p_1 is the pressure field; $p = p_1 - \frac{1}{2} \rho_0[\underline{\omega} \times \mathbf{x}]^2$; $\underline{\omega} = \omega \mathbf{k}$ is the constant angular velocity; γ_T, γ_C are, respectively, the thermal and solute expansion coefficients; ϵ is the porosity of the medium; T_0 is a reference temperature; C_0 is a reference concentration; $\mathbf{v}$ is the seepage velocity field; C is the concentration field; μ is the viscosity; T is the temperature field;

k_T, k_C are, respectively, the thermal and salt diffusivity; c is the specific heat of the solid; ρ_0 is the fluid density at reference temperature T_0 ; $A = \frac{(\rho_0 c)_m}{(\rho_0 c_p)_f}$; c_p is the specific heat of fluid at constant pressure; and the subscript m and f refer to the porous medium and to the fluid, respectively. To (18) we append the boundary conditions

$$(19) \quad \begin{cases} T_L = T_0 + (T_1 - T_2)/2, & C_L = C_0 + (C_1 - C_2)/2 & \text{on } z = 0 \\ T_U = T_0 - (T_1 - T_2)/2, & C_U = C_0 - (C_1 - C_2)/2 & \text{on } z = d \end{cases}$$

with $T_1 > T_2$ and $C_1 > C_2$. Let us introduce the dimensionless quantities

$$\begin{cases} \mathbf{x} = d \mathbf{x}^*, & t = \frac{A d^2}{k_T} t^*, & \mathbf{v} = \frac{k_T}{d} \mathbf{v}^*, \\ P^* = \frac{k(p + \rho_0 g z)}{\mu k_T}, & T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_2}, & C^* = \frac{C - C_0}{C_1 - C_2} \end{cases}$$

omitting all the stars, the dimensionless equations are:

$$(20) \quad \begin{cases} \nabla P = -\mathbf{v} + (RT - CC)\mathbf{k} + \mathcal{T} \mathbf{v} \times \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \Delta T \\ \varepsilon Le C_t + Le \mathbf{v} \cdot \nabla C = \Delta C \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} \nu = \mu/\rho_0 & \text{is the kinematic viscosity} \\ \varepsilon = \epsilon/A & \text{is the normalized porosity} \\ \mathcal{T} = 2k\omega/\epsilon\nu & \text{is the Taylor-Darcy number} \\ Le = k_T/k_C & \text{is the Lewis number} \\ R = \frac{\gamma_T g (T_1 - T_2) d k}{\nu k_T} & \text{is the thermal Rayleigh number} \\ C = \frac{\gamma_C g (C_1 - C_2) d k}{\nu k_T} & \text{is the solutal Rayleigh number.} \end{cases}$$

To (20) we append the boundary data

$$(21) \quad \begin{cases} T_L = 1/2, & C_L = 1/2 & \text{on } z = 0 \\ T_U = -1/2, & C_U = -1/2 & \text{on } z = 1 \end{cases}$$

(20)-(21) admit the steady state solution (motionless state)

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_s = 0; & \nabla p_s(z) = (-R + C) \left(z - \frac{1}{2} \right) \mathbf{k}; \\ T(z) = -\left(z - \frac{1}{2} \right); & C(z) = -\left(z - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

On denoting by $\mathbf{u} = (u, v, w)$, θ , Γ , π the dimensionless perturbations to the (seepage) velocity, temperature, concentration and pressure fields, respectively, the equations governing the perturbations $\mathbf{u} = (u, v, w)$, θ , $Le \Gamma$, π are:

$$(23) \quad \begin{cases} \nabla \pi = -\mathbf{u} + (R\theta - Le C \Gamma) \mathbf{k} + \mathcal{T} \mathbf{u} \times \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta \\ \varepsilon Le \Gamma_t + Le \mathbf{u} \cdot \nabla \Gamma = w + \Delta \Gamma \end{cases}$$

with the boundary conditions:

$$(24) \quad w = \theta = \Gamma = 0 \quad \text{on } z = 0, 1.$$

In the sequel we shall assume that the perturbation fields are periodic functions of x and y of periods $2\pi/a_x$, $2\pi/a_y$, respectively and we shall denote by $\Omega = [0, 2\pi/a_x] \times [0, 2\pi/a_y] \times [0, 1]$ the periodicity cell. Finally to ensure that the steady state (22) is unique, we assume that

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0.$$

By taking the third component of the double curl of (23)₁ and linearizing we obtain

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta w + \mathcal{T}^2 w_{zz} = \Delta_1 (R\theta - Le C \Gamma) \\ \theta_t = w + \Delta \theta \\ \varepsilon Le \Gamma_t = w + \Delta \Gamma \end{cases}$$

where $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. We notice that the set $\mathcal{I}$ of the *kinematically admissible perturbations* is characterized by (24), (25)₁, the periodicity and regularity conditions.

It is easily verified that setting

$$(26) \quad \begin{cases} \bar{w} = \alpha(R\bar{\theta} - Le C \bar{\Gamma}) \\ \bar{\theta} = \hat{\theta}(x, y, t) \sin(\pi z) \\ \bar{\Gamma} = \hat{\Gamma}(x, y, t) \sin(\pi z) \end{cases}$$

with

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a^2}{\xi + \mathcal{T}^2 \pi^2}, & \xi = a^2 + \pi^2 \\ a^2 = a_x^2 + a_y^2 \end{cases}$$

and $\hat{\theta}, \hat{\Gamma}$ verifying the plan-form equation

$$(28) \quad \Delta_1 \cdot = -a^2 \cdot,$$

it follows that $(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{\Gamma}) \in \mathcal{I}$. Along this perturbations $(25)_2 - (25)_3$ become

$$(29) \quad \begin{cases} \bar{\theta}_t = \alpha R \bar{\theta} - \alpha Le C \bar{\Gamma} + \Delta \bar{\theta} \\ \varepsilon Le \bar{\Gamma}_t = \alpha R \bar{\theta} - \alpha Le C \bar{\Gamma} + \Delta \bar{\Gamma}. \end{cases}$$

By virtue of

$$\Delta \bar{\theta} = -\xi \bar{\theta}, \quad \Delta \bar{\Gamma} = -\xi \bar{\Gamma}$$

it follows that the constant $\bar{\alpha}^2$ appearing in (9) is given by ξ , and (29) can be written (omitting the bar)

$$(30) \quad \begin{cases} \theta_t = b_1 \theta + b_2 \Gamma \\ \Gamma_t = b_3 \theta + b_4 \Gamma. \end{cases}$$

with

$$(31) \quad \begin{cases} b_1 = \alpha R - \xi, & b_2 = -\alpha Le C \\ b_3 = \frac{1}{\varepsilon Le} \alpha R, & b_4 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} C - \frac{1}{\varepsilon Le} \xi. \end{cases}$$

Therefore introducing the functional (12) with the b_i given by (31), $\{u = \theta, v = \Gamma\}$ and noticing that

$$(32) \quad \begin{cases} A = -\frac{\xi}{\varepsilon Le} (\alpha R - Le \alpha C - \xi) \\ I = \alpha R - \frac{\alpha}{\varepsilon} C - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon Le}\right) \xi \end{cases}$$

are constant, from (30) it follows that

$$(33) \quad \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(30)} = I A (\|\theta\|^2 + \|\Gamma\|^2).$$

Let us consider now the system

$$(34) \quad \begin{cases} A > 0 \\ I > 0 \end{cases}$$

i.e., in view of (32),

$$(35) \quad \begin{cases} \xi + Le \alpha C - \alpha R > 0 \\ \alpha R - \frac{\alpha}{\varepsilon} C - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon Le}\right) \xi > 0. \end{cases}$$

But (35) imply

$$(36) \quad \left(Le - \frac{1}{\varepsilon}\right) C > \frac{1}{\varepsilon Le} \frac{\xi}{\alpha} \geq \frac{1}{\varepsilon Le} R_B$$

with

$$(37) \quad R_B = \pi^2 \left(1 + \sqrt{1 + \mathcal{T}^2}\right),$$

hence only if

$$(38) \quad \begin{cases} \varepsilon Le > 1 \\ C \geq C^* = \frac{R_B}{Le(\varepsilon Le - 1)} \end{cases}$$

(35) can hold.

Theorem 4. *Let*

$$(39) \quad \varepsilon Le \leq 1$$

or

$$(40) \quad \varepsilon Le > 1, \quad C < C^*.$$

Then the critical value for the linear and nonlinear stability of the critical point $O \equiv (\theta \equiv \Gamma \equiv \mathbf{u} \equiv 0)$ is given by

$$(41) \quad R_C^* = LeC + R_B.$$

Proof. Let

$$(42) \quad R = R_C^* + k$$

with k = positive constant. Setting

$$(43) \quad \begin{cases} \bar{a}^2 = \pi^2 \sqrt{1 + \mathcal{T}^2} \\ \alpha_* = \alpha(\bar{a}^2) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \mathcal{T}^2}} \end{cases}$$

it turns out that

$$(44) \quad A(\alpha_*) = -\frac{\alpha_*^2 k}{\varepsilon Le} R_B$$

i.e. A is negative and of the first order in k . Contemporarely it turns out that V and I at order zero in k , are given by

$$(45) \quad \begin{cases} \bar{V} = 2\alpha_*^2 \left\| LeC\Gamma + \frac{R_C^*}{\varepsilon Le} \theta \right\|^2 \geq 0 \\ \bar{I} = \alpha_* [(\varepsilon Le - 1)C - R_B] = (\varepsilon Le - 1)(C - C^*) \leq 0 \end{cases}$$

both in the cases $\varepsilon Le \leq 1$, and $\{\varepsilon Le > 1, C < C^*\}$. Therefore for sufficiently small k , V is positive definite and $A(\alpha_*)I(\alpha_*) > 0$.

Remark 1. In the case $\{\varepsilon Le > 1, C > C^*\}$, the critical value for R is [9]

$$(46) \quad R_C = \frac{C}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon Le}\right) R_B.$$

Remark 2. For the proof of theorems generalizing Theorems 1-3, we refer to [10].

Remark 3. The stability-instability of a double diffusive convection in a porous medium (in different circumstances) has been considered also in [11], [12].

Acknowledgements

This work has been performed under the auspices of the G. N. F. M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of wave propagation and stability in models of continuous media".

References

- [1] O.A. Ladyzenskaja, V. A. Solonikov (1968) *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Vol. 23, Transl. Math. Monogr. A.M.S., Providence Rhode Island.
- [2] A. Friedman *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc. London.
- [3] J. Smoller (1983) *Shock waves and reaction - diffusion equations*. Springer - Verlag. n. 258 of a "Series of Comprehensive Studies in Mathematics".
- [4] H. Amann *Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions*, A.R.M.A., 92, 186; *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. Reaction - diffusion systems*, Diff. & Integr. Equ., Vol. 3, 1, 190; *Dynamic Theorey of quasilinear parabolic systems III. Global existence*, Math. Z. Ang. 202, 1989.
- [5] J.N. Flavin, S. Rionero (1996) *Qualitative estimates for partial differential equations. An introduction*. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- [6] D.A. Nield and A. Bejan (1992), *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag: New York.
- [7] D.D. Joseph (1976), *Stability of fluid motions I, II*. Springer Verlag, New York.

- [8] B. Straughan (2004), *The energy method, stability, and nonlinear convection*. Appl. Math. Sci. Ser. Vol. 91, Springer-Verlag, Second edition.
- [9] S. Rionero *On the instability sources in dynamical systems*. Proceedings STAMM2002 (to appear)
- [10] S. Rionero *On the rigorous reduction of the L^2 -stability of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E. and the stability of the solutions to a binary system of O.D.E..* (to appear)
- [11] S. Lombardo, G. Mulone, B. Straughan (2001) *Non-linear stability in the Bénard problem for a double-diffusive mixture in a porous medium*. Math. Meth. Appl. Sci., 24, pp. 1229-1246.
- [12] S. Lombardo, G. Mulone (2002) *Necessary and sufficient conditions of global nonlinear stability of rotating double-diffusive convection in porous media*. Continuum. Mech. Thermodyn., 14, pp.527-540.

The classical isoperimetric theorem

Nota del Socio Corrispondente Nicola Fusco¹

(Adunanza del 7 Maggio 2004)

Abstract: We give an introduction to some basic concepts and results of geometric measure theory. Then, this material is used to present De Giorgi's proof of the isoperimetric property of the sphere. **Sunto** Diamo un'introduzione ai concetti e ai risultati di base della teoria geometrica della misura. Questo materiale introduttivo viene quindi utilizzato per presentare la dimostrazione di De Giorgi della proprietà isoperimetrica della sfera.

1 Introduction

After almost 50 years since it was published the paper by De Giorgi concerning the isoperimetric property of the sphere ([17]) still strikes the reader for its elegance, brilliant simplicity and essentiality. It is amazing that he was able to derive such a fundamental result starting from a quite general definition of perimeter. However, looking at the whole theory of sets of finite perimeter, one gradually realizes that definition (1.2) is much deeper than it appears at first sight.

These notes were written up for a six lectures course given by the author in July 2003 at a summer school in Mondello. The aim is to give a self contained proof of De Giorgi's result. In Section 2 we recall all definitions and basic properties of Hausdorff measures needed for the sequel, including area and coarea formulas. Section 3 contains the essential material on BV functions and sets of finite perimeter. Most results presented in this section are provided with proofs except Theorem 3.15 concerning the structure of sets of finite perimeter. In the first part of Section 4 we present a few results on Steiner symmetrization of sets of finite perimeter, while the isoperimetric property of the sphere is proved in the last part of the

¹Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli 'Federico II',
Via Cintia, 80126 Napoli (Italy); e-mail: n.fusco@unina.it

section. Finally, in the present section we give an elementary proof of the isoperimetric theorem in the plane covering the case of a domain whose boundary is an absolutely continuous curve.

In writing these notes my basic references for Sections 2 and 3 have been the books [3], [20] and [19] to which the reader may refer for further information and for all the statements which are not proved here. The two dimensional proof of the isoperimetric theorem is taken from the survey paper [38], while the material presented in Section 4.1 is taken from the recent paper [14]. Finally, the proof of the isoperimetric theorem contained in Section 4.2 makes use of the technical Lemma 4.12 for which I would like to thank Giovanni Alberti with whom I have discussed the subject.

Here I have made no mention of any the various results related to the classical isoperimetric theorem, usually called “isoperimetric inequalities”. Good references for this subject are the books [32], [4], [9], [27], and the papers [30], [13], [28], [29], [5], [22], [31]. Further extensions of the classical isoperimetric inequality within the framework of riemannian manifolds or currents are contained respectively in [21] and in [1], [2].

1.1 The isoperimetric theorem

The classical isoperimetric theorem says that a plane curve which encloses a prescribed area and has the shortest length is a circle. Mathematicians are well acquainted with this property of the circle since more that 2500 years, but the first serious attempts to give it a rigorous proof are relatively recent. In this regard, I would like to mention the early proofs given by Steiner [37] and Edler [18] in the nineteenth century, together with later contributions (and more complete proofs) published in the first half of the twentieth century by Hurwitz [23], [24], Minkowski [26], Lebesgue [25], Carathéodory and Study [12], Blaschke [6], [7], and Bonnesen [8].

The Euclidean space counterpart of the isoperimetric theorem states that among all surfaces enclosing a prescribed volume the one with lest area is the sphere. Early proofs of this result were given by Tonelli [39], Schmidt [34], [35], [36], Radò [33]. For all these authors the relevant question was to prove the isoperimetric property of the sphere in larger classes of competing sets for which a suitable notion of surface area could be defined.

This problem was completely solved by De Giorgi who considered the largest possible class of competing sets, the Lebesgue measurable sets. Starting from some previous papers of Caccioppoli [10], [11], he showed that one can assign to each measurable set E in $\mathbb{R}^n$ a suitable measure of the boundary, i.e. a number $P(E) \in [0, \infty]$, that he called the *perimeter* of E . Of course, if E is a smooth open set its perimeter agrees with the classical measure of the boundary ∂E . By using this notion of perimeter he was able to prove that any measurable set E with finite measure satisfies the following *isoperimetric inequality*

$$(1.1) \quad [\mathcal{L}^n(E)]^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} P(E)$$

and that the equality holds if and only if E is (equivalent to) a ball. Here and in the sequel we denote the usual Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$ by the symbol $\mathcal{L}^n$, while ω_n stands for the measure of the unit ball in $\mathbb{R}^n$.

In the definition of perimeter and in De Giorgi's approach to the isoperimetric inequality (1.1) a key role is played by his extension of the classical *Gauss–Green* formulas. To understand this, let us consider a bounded open set E with C^1 boundary and let us take any map $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Then, the divergence theorem says that

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\partial E} \langle \varphi, \nu^E \rangle \, d\sigma,$$

where ν^E is the *inner normal* to the boundary of E and σ denotes the usual surface measure on ∂E . From this formula we get

$$\begin{aligned} \sigma(\partial E) &= \sup \left\{ \int_{\partial E} \langle \varphi, \nu^E \rangle \, d\sigma : \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Notice that the last supremum in this formula makes sense for any measurable set. Thus, we may define the perimeter $P(E)$ of a measurable set E by setting

$$(1.2) \quad P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Though the definition originally given by De Giorgi in [15] is a different one, it may be easily proved that his definition is equivalent to (1.2). As we shall see in Section 3, definition (1.2) relates sets of finite perimeter to BV functions. On the other hand, the original definition of De Giorgi has the advantage of providing a very useful approximation of the characteristic function of a set of finite perimeter by means of smooth functions, a property that we shall deduce from the theory of BV functions.

1.2 The isoperimetric inequality in the plane

In this section we present a proof of the isoperimetric inequality in the plane, due to Hurwitz, which applies to any bounded domain E whose boundary is a simple, closed, absolutely continuous curve. This proof is based on the Gauss–Green formulas and on the Wirtinger inequality, which is just the one dimensional Sobolev–Poincaré inequality stated with the sharp constant. This is by no means surprising, as we shall see that also in higher dimension the isoperimetric inequality is very much related to the Sobolev imbedding theorem and to the Sobolev–Poincaré inequality.

But first notice that in two dimensions inequality (1.1) can be equivalently written in the form

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

where L is the length of the curve enclosing E and $A = \mathcal{L}^2(E)$ is the area of E .

Theorem 1.1 (Isoperimetric inequality in the plane) *Let E be a bounded domain in the plane, whose boundary is a simple, closed and absolutely continuous curve γ . Then,*

$$(1.3) \quad L^2 \geq 4\pi A.$$

Moreover, if the inequality in (1.3) holds as an equality, E is a disk.

Proof. Let us orient the boundary γ of E counterclockwise. Then, given any point (x_0, y_0) in the plane, from the Gauss–Green formulas we get that

$$A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_{\gamma} (y_0 - y) dx + (x - x_0) dy.$$

Let $(x(s), y(s)) : [0, L] \mapsto \mathbb{R}^2$ be a parametrization of γ , where the parameter s is the arclength, hence $x'^2 + y'^2 = 1$. From the equality above, using the Cauchy–Schwartz inequality, we get

$$\begin{aligned} (1.4) \quad A &= \frac{1}{2} \int_0^L [(y_0 - y(s))x'(s) + (x(s) - x_0)y'(s)] ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^L [(y_0 - y(s))^2 + (x(s) - x_0)^2] ds \right)^{1/2} \left(\int_0^L (x'^2 + y'^2) ds \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{L}}{2} \left(\int_0^L [(y_0 - y(s))^2 + (x(s) - x_0)^2] ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

If (x_0, y_0) is the baricenter of γ , we get

$$x(0) - x_0 = x(L) - x_0, \quad \int_0^L (x(s) - x_0) ds = 0$$

and analogous relations for $y(s)$. By applying Wirtinger inequality (1.6) to the functions $x(s) - x_0$ and $y(s) - y_0$, we obtain

$$(1.5) \quad \int_0^L [(y_0 - y(s))^2 + (x(s) - x_0)^2] ds \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^L (x'^2 + y'^2) ds = \frac{L^3}{4\pi^2}.$$

Then, (1.3) immediately follows from this inequality and from (1.4).

Let us now assume that equality holds in (1.3). Then, in particular, the equality also holds in (1.5). Therefore, from Proposition 1.2 we get that

$$x(s) - x_0 = a \sin \frac{2\pi s}{L} + b \cos \frac{2\pi s}{L}, \quad y(s) - y_0 = c \sin \frac{2\pi s}{L} + d \cos \frac{2\pi s}{L}.$$

Since also (1.4) holds as an equality, we get that there exists a constant λ such that $y(s) - y_0 = \lambda x'(s) = \frac{2\pi\lambda}{L} \left(a \cos \frac{2\pi s}{L} - b \sin \frac{2\pi s}{L} \right)$. Therefore, setting $\mu = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \mu \sin \alpha$, $b = \mu \cos \alpha$, we easily get that

$$x(s) - x_0 = \mu \cos \left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha \right), \quad y(s) - y_0 = -\frac{2\pi\lambda}{L} \mu \sin \left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha \right).$$

From these equalities, recalling that $x'^2 + y'^2 = 1$, we may conclude that $\mu = |\lambda| = L/2\pi$. Therefore, since γ is oriented counterclockwise, we finally get that

$$x(s) = x_0 + \frac{L}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha\right), \quad y(s) = y_0 + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi s}{L} - \alpha\right),$$

hence the assertion follows. $\square$

Proposition 1.2 (Wirtinger inequality) *Let (a, b) be a bounded interval and $u \in W^{1,2}(a, b)$ such that*

$$u(a) = u(b), \quad \int_a^b u(t) dt = 0.$$

Then,

$$(1.6) \quad \int_a^b u^2(t) dt \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} \int_a^b u'^2(t) dt$$

and the equality holds if and only if $u = c_1 \sin \frac{2\pi(t-a)}{b-a} + c_2 \cos \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$.

Proof. It is enough to prove the assertion in the case when the interval (a, b) coincides with $(0, 2\pi)$. The general case then follows by a simple change of variable. Let us fix $u \in W^{1,2}(0, 2\pi)$ and set for any $k \in \mathbb{Z}$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ikt} dt, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(t) e^{-ikt} dt.$$

The assumption $\int_0^{2\pi} u(t) dt = 0$ yields $a_0 = 0$, while the equality $u(0) = u(2\pi)$ implies that $b_k = ika_k$ for any k . Therefore we have

$$\int_0^{2\pi} |u|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} |a_k|^2, \quad \int_0^{2\pi} |u'|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |b_k|^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2$$

and thus (1.6) follows from the trivial inequality

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \geq \sum_{k \neq 0} |a_k|^2.$$

Notice that this last inequality implies also that the equality in (1.6) holds if and only if $a_k = 0$ for any $k \neq 1, -1$, i.e. if and only if u is a linear combination of e^{it} and e^{-it} . $\square$

2 Hausdorff measures

2.1 Definition and basic properties

Before giving the definition and the main properties of Hausdorff measures in $\mathbb{R}^n$, let us fix some notation and recall some elementary facts of measure theory needed in the sequel.

Let $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ be a set function defined on all subsets of $\mathbb{R}^n$. We say that μ is an *outer measure* if

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) for any sequence E_h of subsets of $\mathbb{R}^n$, then
$$\mu\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h\right) \leq \sum_{h \in \mathbb{N}} \mu(E_h).$$

In the sequel an outer measure will be also called a '*measure*'. Starting from a measure μ one can give the notion of μ -*measurable* set. A set E is said to be μ -measurable if

$$(2.1) \quad \mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E) \quad \text{for any subset } F \text{ of } \mathbb{R}^n.$$

Notice that to prove that a set E is μ -measurable it is enough to show that for any F the left hand side in (2.1) is greater than or equal to the right hand side, since the reverse inequality follows from the subadditivity of μ .

Outer measure behave nicely on measurable sets, as it is shown by the next result (see [19, Theorem 1, Section 1.1]).

Theorem 2.1 *Let μ be an outer measure and $\mathcal{M}_\mu$ the family of all μ -measurable sets. Then $\mathcal{M}_\mu$ is a σ -algebra and μ is countably additive on $\mathcal{M}_\mu$, i.e.*

$$E_h \text{ is a sequence of pairwise disjoint sets in } \mathcal{M}_\mu \implies \mu\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h\right) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \mu(E_h).$$

When the σ -algebra $\mathcal{M}_\mu$ of μ -measurable sets contains the σ -algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ of Borel subsets of $\mathbb{R}^n$ the measure μ is called a *Borel measure*. If μ is also finite on compact sets, then we say that μ is a (positive) *Radon measure*. The next result, due to Carathéodory, provides a useful criterion ensuring that an outer measure is a Borel measure.

Theorem 2.2 *Let μ be an outer measure with the property that*

$$(2.2) \quad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) \quad \text{for any } E, F \subset \mathbb{R}^n \text{ such that } \text{dist}(E, F) > 0.$$

Then μ is a Borel measure.

Proof. To prove the assertion it is enough to show that if C is a closed subset of $\mathbb{R}^n$, then

$$(2.3) \quad \mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C) \quad \text{for any subset } F \text{ of } \mathbb{R}^n \text{ with } \mu(F) < \infty.$$

In fact, as we have observed above, from this inequality it follows that C is μ -measurable, hence $\mathcal{M}_\mu$ contains the closed sets. Therefore, $\mathcal{M}_\mu$ contains also the smallest σ -algebra containing the closed sets, i.e. the σ -algebra of Borel sets. Let us fix a set F of finite μ -measure and set $F_0 = \{x \in F : \text{dist}(x, C) \geq 1\}$ and

$$F_i = \left\{ x \in F : \frac{1}{i+1} \leq \text{dist}(x, C) < \frac{1}{i} \right\} \quad \text{for } i \geq 1.$$

From assumption (2.2) it follows that for any h

$$\sum_{i=0}^h \mu(F_{2i}) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^h F_{2i}\right) \leq \mu(F), \quad \sum_{i=0}^h \mu(F_{2i+1}) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^h F_{2i+1}\right) \leq \mu(F),$$

hence the series $\sum_i \mu(F_i)$ is convergent. Since $F \setminus C = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, by recalling (2.2) and using the countable subadditivity of μ , we get that for any h

$$\begin{aligned} \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C) &\leq \mu(F \cap C) + \mu\left(\bigcup_{i=0}^h F_i\right) + \sum_{i=h}^{\infty} \mu(F_i) \\ &= \mu\left((F \cap C) \cup \bigcup_{i=0}^h F_i\right) + \sum_{i=h}^{\infty} \mu(F_i) \leq \mu(F) + \sum_{i=h}^{\infty} \mu(F_i). \end{aligned}$$

Then (2.3) follows from the previous inequality, letting $h \rightarrow \infty$. $\square$

If μ is an outer measure and B is a Borel subset of $\mathbb{R}^n$, we shall denote by $\mu \llcorner B$ the outer measure defined for any $E \subset \mathbb{R}^n$ by

$$\mu \llcorner B(E) = \mu(B \cap E).$$

If μ is a Borel measure, $\mu \llcorner B$ is Borel too.

Example 2.3 The best known example of outer measure is Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$, which is defined by setting, for any $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} |Q_h| : E \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} Q_h \right\},$$

where by Q we denote an open cube with sides parallel to the coordinate axes and by $|Q|$ its elementary measure. From this definition, using Theorem 2.2, it can be easily checked that $\mathcal{L}^n$ is a positive Radon measure.

In the sequel the unit ball in $\mathbb{R}^n$ will be denoted by B_1 . We recall that the Lebesgue measure of B_1 , denoted by ω_n , is given by

$$\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)},$$

where $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s} ds$, for $t > 0$, is the Euler Γ -function. Similarly, if s is a nonnegative real number, we shall denote by ω_s the quantity

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + s/2)}.$$

Definition 2.4 Let $s \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$. The s -dimensional Hausdorff pre-measure $\mathcal{H}_\delta^s$ is defined by setting for any subset E of $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^s : E \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h, \text{diam } C_h < \delta \right\}.$$

Starting from the measures $\mathcal{H}_\delta^s$, we may define the s -dimensional Hausdorff measure of E setting

$$(2.4) \quad \mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Notice that since $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(E)$ is a decreasing function of δ the limit appearing in (2.4) always exists. The following properties of Hausdorff measures are easily deduced from Definition 2.4.

Proposition 2.5 (Elementary properties of Hausdorff measures) *The measures $\mathcal{H}^s$ in $\mathbb{R}^n$ enjoy the the following properties.*

- (i) $\mathcal{H}^s$ is a Borel measure;
- (ii) for any $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta^0(E) = \#(E)$;
- (iii) if $s > n$, then $\mathcal{H}^s \equiv 0$;
- (iv) $\mathcal{H}^s(x + E) = \mathcal{H}^s(E)$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ for any $\lambda > 0$;
- (v) if $s > s' \geq 0$ and $\mathcal{H}^s(E) > 0$, then $\mathcal{H}^{s'}(E) = \infty$;
- (vi) if $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a Lipschitz map, then

$$\mathcal{H}^s(\Phi(E)) \leq [\text{Lip } \Phi]^s \mathcal{H}^s(E),$$

where $\text{Lip } \Phi$ is the Lipschitz constant of Φ .

Proof. The fact that $\mathcal{H}^s$ is an outer measure and that properties (ii), (iv) and (vi) hold is a straightforward consequence of Definition 2.4.

(i) To prove that $\mathcal{H}^s$ is a Borel measure we use Theorem 2.2. To this aim, let us fix two subsets E and F of $\mathbb{R}^n$ such that $\text{dist}(E, F) > 0$. In order to prove (2.2) it is enough to show that $\mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(E \cup F)$ whenever $\mathcal{H}^s(E \cup F) < \infty$. Let us fix a positive number $\delta < \frac{1}{2} \text{dist}(E, F)$ and let us denote by C_h a countable covering of $E \cup F$ such that $\text{diam } C_h < \delta$ for any h and

$$\frac{\omega_s}{2^s} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^s < \mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) + \delta.$$

Notice that, since the diameter of each C_h is less than δ , any of the C_h 's may intersect at most one of the two sets E and F . Therefore, we get

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F) &\leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{\{h: C_h \cap E \neq \emptyset\}} (\text{diam } C_h)^s + \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{\{h: C_h \cap F \neq \emptyset\}} (\text{diam } C_h)^s \\ &\leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^s < \mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) + \delta\end{aligned}$$

and the assertion follows by letting δ go to zero.

(iii) Let us fix $\delta > 0$, and $h \in \mathbb{N}$ such that $\sqrt{n}/h < \delta$. Let us cover the cube $Q = [0, 1]^n$ with h^n closed cubes Q_i of side length $1/h$. Then, we have

$$\mathcal{H}_\delta^s(Q) \leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{i=1}^{h^n} (\text{diam } Q_i)^s = \frac{\omega_s}{2^s} h^{n-s} n^{s/2} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow \infty.$$

Therefore $\mathcal{H}_\delta^s(Q) = 0 = \mathcal{H}^s(Q)$, hence $\mathcal{H}^s \equiv 0$.

(v) We argue by contradiction, assuming that $\mathcal{H}^s(E) > 0$ and $\mathcal{H}^{s'}(E) < \infty$, with $s > s' \geq 0$. Then, for any $\delta > 0$ there exists a countable covering C_h of E such that $\text{diam } C_h < \delta$ for any h and

$$\frac{\omega_{s'}}{2^{s'}} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^{s'} < \mathcal{H}_\delta^{s'}(E) + 1 \leq \mathcal{H}^{s'}(E) + 1.$$

Therefore we have also

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^s \leq \delta^{s-s'} \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^{s'} < \delta^{s-s'} \frac{2^{s'} \omega_s}{2^s \omega_{s'}} [\mathcal{H}^{s'}(E) + 1],$$

hence, letting δ go to zero, we get that $\mathcal{H}^s(E) = 0$, a contradiction to the assumption $\mathcal{H}^s(E) > 0$. $\square$

The *Hausdorff dimension* of a subset E is given by

$$\mathcal{H}\text{-dim}(E) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Notice that if $k = \mathcal{H}\text{-dim}(E)$, then $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ for any $s \in [0, k)$. In fact if we had $\mathcal{H}^{s'}(E) < \infty$ for some $s' < k$, then from Proposition 2.5 (v) we would also get that $\mathcal{H}^s(E) = 0$ for any $s' < s < k$ and this would contradict the fact that k is the Hausdorff dimension of E . Notice that Proposition 2.5 (v) implies also that $\mathcal{H}^s(E) = 0$ for any $s > k$. However, if k is the Hausdorff dimension of E , then $\mathcal{H}^k(E)$ can be any number in $[0, \infty]$.

Examples 2.6 (i) If $E = \{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$, then $\mathcal{H}\text{-dim}(E) = 0$.

(ii) If E is a k -dimensional smooth manifold in $\mathbb{R}^n$, then $\mathcal{H}\text{-dim}(E) = k$.

(iii) If E is the Cantor set, then it can be easily checked that $\mathcal{H}\text{-dim}(E) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Let us now introduce the Steiner symmetral of a set $E \subset \mathbb{R}^n$ with respect to a fixed direction $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Definition 2.7 Let E be any subset in $\mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$. Let us denote by π_ν the $(n-1)$ -dimensional hyperplane passing through the origin, orthogonal to ν . The *Steiner symmetral* of E in the direction ν is the set

$$(2.5) \quad E_\nu^s = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = z + t\nu, z \in \pi_\nu, |t| < \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(E_{z,\nu}) \right\},$$

where $E_{z,\nu} = \{x \in E : x = z + s\nu, s \in \mathbb{R}\}$ is the intersection of E with the line through z , parallel to ν .

Clearly, the set E_ν^s is symmetric with respect to the hyperplane π_ν . Moreover, the following properties are an easy consequence of Definition 2.7.

Proposition 2.8 Let E be any subset of $\mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ any direction. Then, $\text{diam } E_\nu^s \leq \text{diam } E$. Moreover, if E is measurable, $\mathcal{L}^n(E_\nu^s) = \mathcal{L}^n(E)$.

Proof. The equality $\mathcal{L}^n(E_\nu^s) = \mathcal{L}^n(E)$ is a straightforward consequence of Fubini's theorem.

To prove that the diameter decreases under Steiner symmetrization we fix two points $x_1, x_2 \in E^s$, $x_i = z_i + t_i\nu$ for $i = 1, 2$, where $z_i \in \pi_\nu$ and $|t_i| < \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(E_{z_i,\nu})$. Let us now set for $i = 1, 2$

$$\alpha_i = \inf\{t : z_i + t\nu \in E\}, \quad \beta_i = \sup\{t : z_i + t\nu \in E\}$$

and assume, without loss of generality, that $\beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_1 - \alpha_2$. Thus, we have

$$\begin{aligned} \beta_2 - \alpha_1 &\geq \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2) + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1) \\ &\geq \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(E_{z_1,\nu}) + \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(E_{z_2,\nu}) \geq |t_1| + |t_2| \geq |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Therefore, we get that

$$|x_2 - x_1|^2 = |z_2 - z_1|^2 + |t_2 - t_1|^2 \leq |z_2 - z_1|^2 + (\beta_2 - \alpha_1)^2 = |z_2 + \beta_2\nu - z_1 - \alpha_1\nu|^2 \leq (\text{diam } E)^2$$

and from this inequality the assertion follows. $\square$

The inequality stated in the following theorem is called *isodiametral inequality*. It says that the Lebesgue measure of any set E is always less than or equal to the measure of the ball having the same diameter of E . It follows from Proposition 2.8, but it cannot be proved by taking the smallest ball containing E since the diameter of this ball can be larger than the diameter of E (think for instance of E being an equilateral triangle).

Theorem 2.9 Let E be any subset of $\mathbb{R}^n$. Then

$$(2.6) \quad \mathcal{L}^n(E) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam } E}{2} \right)^n.$$

Proof. Let us assume that $\text{diam } E < \infty$, otherwise (2.6) is trivial. If E is measurable, we set $E_1 = E_{e_1}^s$, $E_2 = (E_1)_{e_2}^s, \dots, E^* = (E_{n-1})_{e_n}^s$, where $\{e_1, \dots, e_n\}$ is the standard base in $\mathbb{R}^n$. By construction, E^* is symmetric with respect to all the coordinates planes, hence $x \in E^*$ if and only if $-x \in E^*$ and thus E^* is contained in the closed ball centered at the origin and having the same diameter of E^* . Therefore, we have

$$\mathcal{L}^n(E^*) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam } E^*}{2} \right)^n.$$

From this inequality (2.6) follows immediately, since by Proposition 2.8 $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(E^*)$ and $\text{diam } E^* \leq \text{diam } E$.

If E is any set (not necessarily measurable) (2.6) holds for $\overline{E}$, which is a measurable set, hence it holds also for E , since $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(\overline{E})$ and $\text{diam } E = \text{diam } \overline{E}$. $\square$

Notice that from Theorem 2.9 it follows that, for any $\delta > 0$, the Lebesgue measure $\mathcal{L}^n$ is smaller than or equal to the measure $\mathcal{H}_\delta^n$. In fact, if E is any subset of $\mathbb{R}^n$ and C_h is a sequence of sets with diameter less than δ covering E , from (2.6) we have that

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_h) \leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam } C_h)^n,$$

hence, we get that $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{H}_\delta^n(E)$. The following theorem (see [3, Theorem 2.53]) says that also the opposite inequality is true.

Theorem 2.10 *Let B a Borel set in $\mathbb{R}^n$. For any $\delta \in (0, +\infty]$ we have*

$$\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}_\delta^n(B) = \mathcal{H}^n(B).$$

2.2 Area and coarea formulas

Last theorem of the previous section states that the Hausdorff measure $\mathcal{H}^n$ on $\mathbb{R}^n$ coincides with the usual Lebesgue measure. On the other hand, as a consequence of the area formula, we shall see in this section that if $1 \leq k < n$ is an integer, then the restriction of the Hausdorff measure $\mathcal{H}^k$ to a k -dimensional smooth manifold coincides with the classical measure on the manifold. But before going in further details, we need to recall some useful facts of linear algebra.

Let $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, where $m \geq n$, be a linear operator. In the sequel we shall always identify the linear operator L with the $m \times n$ matrix representing it with respect to the canonical bases of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$. The n -dimensional jacobian of L is defined by

$$(2.7) \quad J_n L = \sqrt{\det(L^* \circ L)}$$

where $L^* : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ is the adjoint of L . If $m = n$, from (2.7) we get that $J_n L = |\det L|$. In the general case, denoting by $X_i(L)$, for $i = 1, \dots, \binom{m}{n}$, the

minors of order n of L , the *Cauchy-Binet formula* ([3, Proposition 2.69]) states that

$$(2.8) \quad \mathbf{J}_n L = \sqrt{\sum_{i=1}^{\binom{m}{n}} |X_i(L)|^2}.$$

Notice that as a consequence of (2.8) we have that $\mathbf{J}_n L > 0$ if and only if the rank of L is n .

Let us consider now a Lipschitz map $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. From Rademacher theorem ([3, Theorem 2.14]) we know that Φ is differentiable (in classical sense) for $\mathcal{L}^n$ -a.e. x in $\mathbb{R}^n$. Then, if x is a point where Φ is differentiable, we denote by $d\Phi_x$ its differential at x , which is a linear operator from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$. Having fixed these notations, we may now state the area formula for Lipschitz maps (see [3, Theorem 2.71]).

Theorem 2.11 (Area formula) *Let $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ be a Lipschitz continuous map with $m \geq n$. Then, for any Borel subset E of $\mathbb{R}^n$, the multiplicity function $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{H}^0(E \cap \Phi^{-1}(y))$ is $\mathcal{H}^n$ -measurable and*

$$(2.9) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(E \cap \Phi^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y) = \int_E \mathbf{J}_n d\Phi_x dx.$$

As a first consequence of formula (2.9) we have that if E_0 is the set of points $x \in \mathbb{R}^n$ such that Φ is not differentiable at x or the rank of $d\Phi_x$ is less than n , then $\mathcal{H}^n(\Phi(E_0)) = 0$.

Next examples show some interesting applications of the area formula.

Examples 2.12 (i) If Φ is one-to-one, from (2.9) we get that the n -dimensional measure of $\Phi(E)$ is given by

$$\mathcal{H}^n(\Phi(E)) = \int_E \mathbf{J}_n d\Phi_x dx.$$

(ii) If $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, (2.8) implies that $\mathbf{J}_1 d\Phi_t = |\Phi'(t)|$. Therefore, if Φ is one-to-one, (2.9) agrees with the classical formula for the length of the parametrized curve $\Phi(t)$,

$$\mathcal{H}^1(\Phi(E)) = \int_E |\Phi'(t)| dt.$$

(iii) Let $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lipschitz function. Let us denote by $\Phi(x) = (x, \gamma(x))$ the vector-valued function mapping $\mathbb{R}^n$ onto the graph $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ of γ . Clearly, Φ is one-to-one and for $\mathcal{L}^n$ -a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ we have $\mathbf{J}_n d\Phi_x = \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x)|^2}$. Therefore, if E is a Borel subset of $\mathbb{R}^n$, we get from (2.9) that

$$(2.10) \quad \mathcal{H}^n(G_\gamma \cap (E \times \mathbb{R})) = \int_E \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x)|^2} dx.$$

Generalizing this example, let us consider a Lipschitz map $\gamma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $k > 1$, and let us set, for any $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = (x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^{n+k}$. Then we may easily check that

$$\mathbf{J}_n d\Phi_x = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{\min\{k,n\}} |M_j(d\gamma_x)|^2},$$

where, for any j , $M_j(d\gamma_x)$ denotes the vector whose components are all the $\binom{k}{j} \binom{n}{j}$ minors of order j of the $k \times n$ matrix $d\gamma_x$.

(iv) Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^2$ and $\Phi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ a parametrization of a C^1 surface $M = \Phi(\Omega)$. Then, (2.9) gives the classical formula for the area of the parametrized surface, since

$$\mathbf{J}_2 d\Phi_{(s,t)} = \sqrt{\left| \frac{\partial(\Phi_2, \Phi_3)}{\partial(s,t)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(\Phi_3, \Phi_1)}{\partial(s,t)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(s,t)} \right|^2},$$

where Φ_1, Φ_2, Φ_3 are the components of the map Φ .

From the area formula one can easily obtain the following change of variables formula.

Theorem 2.13 (Change of variables formula) *Let $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ be a Lipschitz map, with $m \geq n$, and let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ be a Borel function. Then,*

$$y \in \mathbb{R}^m \rightarrow \int_{\Phi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^0(x)$$

is a $\mathcal{H}^n$ -measurable function and

$$(2.11) \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^0(x) \right) d\mathcal{H}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{J}_n d\Phi_x dx.$$

In particular, if Φ is one-to-one, we have

$$\int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} f(\Phi^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{J}_n d\Phi_x dx.$$

Proof. Equation (2.11) follows immediately from (2.9) and from next lemma, by a simple application of B. Levi monotone convergence theorem. $\square$

Lemma 2.14 *Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ be a Borel function. Then, there exists a sequence of Borel sets E_h of $\mathbb{R}^n$ such that for any $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \chi_{E_h}(x).$$

Proof. Let us set for any $h > 1$

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 1\}, \quad E_h = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \frac{1}{h} + \sum_{i=1}^{h-1} \frac{1}{i} \chi_{E_i}(x)\right\}.$$

Notice that from the definition of E_h we get easily that for any $x \in \mathbb{R}^n$

$$(2.12) \quad f(x) \geq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \chi_{E_h}(x).$$

The opposite inequality is trivially satisfied if $f(x) = 0$. If $0 < f(x) < \infty$, then from (2.12) we get that $x \notin E_h$ for infinitely many integers h . Thus, if $x \notin E_{h_i}$ for some h_i , we have that

$$f(x) < \frac{1}{h_i} + \sum_{j=1}^{h_i-1} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x)$$

hence, letting h_i go to ∞ , we get that the opposite inequality to (2.12) holds. Finally, if $f(x) = \infty$, we have that $x \in E_h$ for any h , hence the assertion is trivially satisfied. $\square$

Let us now introduce the definition of rectifiable set.

Definition 2.15 (Rectifiable sets) Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a $\mathcal{H}^k$ -measurable subset of $\mathbb{R}^n$, where $1 \leq k \leq n$ is an integer. We say that S is a k -rectifiable set if there exists a sequence of Lipschitz maps $\Phi_i : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ such that

$$\mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i(\mathbb{R}^k)\right) = 0.$$

Obviously, an n -rectifiable set in $\mathbb{R}^n$ is simply a Lebesgue measurable set. On the other hand, it can be proved (see [20, Theorem 3.1.16]) that if $k < n$ then S is k -rectifiable if and only if there exists a sequence K_i of pairwise disjoint compact sets such that each K_i is a subset of a C^1 manifold M_i and

$$\mathcal{H}^k\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0.$$

An interesting fact about rectifiable sets is that a suitable notion of tangent plane can be given so that the tangent plane exists almost everywhere (see [3, Section 2.11]).

Theorem 2.16 *Let S be a k -rectifiable set. Then, for $\mathcal{H}^k$ -a.e. $x \in S$ there exists a k -dimensional hyperplane π_x^S such that for any $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$*

$$(2.13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\pi_{\frac{x-x}{\varepsilon}}^S} \varphi(y) d\mathcal{H}^k(y) = \int_{\pi_x^S} \varphi(y) d\mathcal{H}^k(y).$$

The k -plane π_x^S such that (2.13) holds is called the *approximate tangent plane* to S at x .

Example 2.17 (Lipschitz graphs) Let $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lipschitz function. By Definition 2.15 the graph G_γ of γ is a $(n-1)$ -rectifiable set in $\mathbb{R}^n$. Let us check that for $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $x = (x', \gamma(x')) \in G_\gamma$ the approximate tangent plane $\pi_x^{G_\gamma}$ is given by the hyperplane orthogonal to the vector

$$(2.14) \quad \nu_\gamma(x) = \left(\frac{\nabla_1 \gamma(x')}{\sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2}}, \dots, \frac{\nabla_{n-1} \gamma(x')}{\sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2}} \right).$$

More precisely, let us denote by Z_0 the complement of the set of the points $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ such that γ is differentiable in x' and x' is a Lebesgue point for $\nabla \gamma$ and set $G_0 = \{(x', \gamma(x')) \in G_\gamma : x' \in Z_0\}$. By Rademacher theorem $\mathcal{H}^{n-1}(Z_0) = 0$ and thus from the area formula (2.10) we have also that $\mathcal{H}^{n-1}(G_0) = 0$. Let us fix $x_0 = (x'_0, \gamma(x'_0)) \in G_\gamma \setminus G_0$ and let us prove that the approximate tangent plane to G_γ at x_0 is orthogonal to the vector $\nu_\gamma(x_0)$ defined in (2.14). To this aim, let us fix a function $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ and $\varepsilon > 0$ and apply the change of variable formula (2.11) to $f(x') = \varphi(\Phi(x'))$, where $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is given by $\Phi(x') = \left(\frac{x' - x'_0}{\varepsilon}, \frac{\gamma(x') - \gamma(x'_0)}{\varepsilon} \right)$. Thus, we get

$$(2.15) \quad \int_{G_{\gamma-x_0}} \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1} = \varepsilon^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi\left(\frac{x' - x'_0}{\varepsilon}, \frac{\gamma(x') - \gamma(x'_0)}{\varepsilon}\right) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2} dx' \\ = \varepsilon^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi\left(\frac{x' - x'_0}{\varepsilon}, \frac{\gamma(x') - \gamma(x'_0)}{\varepsilon}\right) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x'_0)|^2} dx' + I_\varepsilon.$$

Denoting by B_R a ball centered in 0 containing the support of φ , the term I_ε in (2.15) can be estimated by

$$(2.16) \quad \varepsilon^{1-n} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi\left(\frac{x' - x'_0}{\varepsilon}, \frac{\gamma(x') - \gamma(x'_0)}{\varepsilon}\right) \left(\sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x'_0)|^2} \right) dx' \right| \\ \leq \varepsilon^{1-n} \|\varphi\|_\infty \int_{B_{\varepsilon R}^{n-1}(x'_0)} |\nabla \gamma(x') - \nabla \gamma(x'_0)| dx',$$

where $B_r^{n-1}(x'_0)$ is the $(n-1)$ -ball centered at x'_0 of radius r . Recalling that x'_0 is a Lebesgue point for $\nabla \gamma$, from (2.16) we get immediately that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$. Therefore from (2.15), by changing variables and recalling that γ is differentiable in x'_0 , we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{G_{\gamma-x_0}} \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1} = \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x'_0)|^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi\left(y', \frac{\gamma(x'_0 + \varepsilon y') - \gamma(x'_0)}{\varepsilon}\right) dy' \\ = \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x'_0)|^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y', \langle \nabla \gamma(x'_0), y' \rangle) dy' = \int_{\pi_0} \varphi(y) d\mathcal{H}^{n-1},$$

where π_0 is the $(n-1)$ -plane orthogonal to $\nu_\gamma(x'_0)$. By (2.13), π_0 is the approximate tangent plane to G_γ at x_0 .

It can be easily checked that whenever the approximate tangent plane at $x \in S$ exists, it is also unique. In fact, it is possible to prove even more ([3, Remark 2.87]), namely that if S_1 and S_2 are k -rectifiable sets, then

$$\pi_x^{S_1} = \pi_x^{S_2} \quad \text{for } \mathcal{H}^k\text{-a.e. } x \in S_1 \cap S_2.$$

Given a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and a k -rectifiable set S , we say that f is *tangentially differentiable at x* if in x there exists the approximate tangent plane π_x^S and the restriction of f to the affine space $x + \pi_x^S$ is differentiable at x . The tangential differential of f at the point $x \in S$ will be denoted by $d^S f_x$. Notice that if f is a C^1 function, Theorem 2.16 yields that f is tangentially differentiable at $\mathcal{H}^k$ -a.e. x in S and that, for any $h \in \pi_x^S$, $d^S f_x(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$. On the other hand, if f is Lipschitz map, hence $\mathcal{L}^n$ -a.e. differentiable, it may happen that f is not differentiable at any point of S (which is a set of zero Lebesgue measure). However it is still true that f is tangentially differentiable at $\mathcal{H}^k$ -a.e. point x in S ([3, Theorem 2.90]).

Let us now introduce the coarea factor of a linear map. To this aim, let $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear map, with $k \geq m$. Then, the m -dimensional coarea factor of L is defined by

$$\mathbf{C}_m L = \sqrt{\det L \circ L^*}.$$

As in the case of jacobian, the Cauchy–Binet formula easily implies that

$$\mathbf{C}_m L = \sqrt{\sum_{i=1}^{\binom{k}{m}} |X_i(L)|^2},$$

where $X_i(L)$, $i = 1, \dots, \binom{k}{m}$, is the vector whose components are the minors of order m of L .

Theorem 2.18 *Let $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a Lipschitz map and $S \subset \mathbb{R}^n$ a k -rectifiable set, with $m \leq k \leq n$. Then, the function $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{H}^{k-m}(S \cap \Phi^{-1}(y))$ is $\mathcal{L}^m$ -measurable and $S \cap \Phi^{-1}(y)$ is $(k-m)$ -rectifiable for $\mathcal{L}^m$ -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$. Moreover, we have*

$$(2.17) \quad \int_S \mathbf{C}_m d^S \Phi_x d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{k-m}(S \cap \Phi^{-1}(y)) dy.$$

For a proof of Theorem 2.18 see [3, Section 2.12]. Here, we limit ourselves to observe that, as for the area formula, also (2.17) can be easily extended to the case where on the left hand side we have the integral over S of a nonnegative Borel function f . In fact, from Lemma 2.14 we get that under the same assumptions of Theorem 2.18 and if $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ is a Borel function, then the following *generalized coarea formula* holds

$$(2.18) \quad \int_S f(x) \mathbf{C}_m d^S \Phi_x d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{S \cap \Phi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^{k-m}(x) \right) dy.$$

Notice that if $E \subset S$ is a set of $\mathcal{H}^k$ zero measure, then from (2.18) we get that, for $\mathcal{L}^m$ -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^{k-m}(E \cap \Phi^{-1}(y)) = 0$. Similarly, if we set $E_0 = \{x \in S : \text{rank of } d^S \Phi_x < m\}$, we have $\mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap \Phi^{-1}(y)) = 0$ for $\mathcal{L}^m$ -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$.

Notice also that the property that for $\mathcal{L}^m$ -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ the set $S \cap \Phi^{-1}(y)$ is $(k-m)$ -rectifiable can be viewed as a weak version of Sard's theorem (see [20, Theorem 3.4.3]), which states that if $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is of class C^h and $h > n + 1 - m$, then the set $\Phi^{-1}(y)$ is a $(n-m)$ -dimensional manifold of class C^h for $\mathcal{L}^m$ -a.e. $y \in \mathbb{R}^m$.

Examples 2.19 (i) Let $n = k > m \geq 1$ and let $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be the projection over the first m factors. Choosing $S = \mathbb{R}^n$ and noticing that $\mathbf{C}_m d\Phi_x = 1$, we obtain the classical Fubini's theorem as a special case of (2.18). And in fact the generalized coarea formula can be seen as the natural extension of Fubini's theorem to manifolds and rectifiable sets.

(ii) Let $n = k$ and let Φ be a Lipschitz function from $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}$. Then $\mathbf{C}_1 d\Phi_x = |\nabla \Phi(x)|$, hence in this case (2.18) reduces to the classical coarea formula

$$(2.19) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) |\nabla \Phi(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{\Phi(x)=t\}} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dy.$$

(iii) Another special case of formula (2.18) that will be useful in the sequel is when S is an $(n-1)$ -rectifiable set and $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ is the projection over the first $n-1$ factors. In this case we may easily check that $\mathbf{C}_{n-1} d^S \Phi_x = |\nu_n^S(x)|$, where $\nu_n^S(x)$ is the n -th component of the normal $\nu^S(x)$ to the approximate tangent plane π_x^S . Thus, denoting the points in $\mathbb{R}^n$ by (x', y) , $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, (2.18) yields

$$(2.20) \quad \int_S f(x) |\nu_n^S(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{S_{x'}} f(x', y) \mathcal{H}^0(y) \right) dx',$$

where $S_{x'} = \{y \in \mathbb{R} : (x', y) \in S\}$. An interesting consequence of (2.20) can be obtained by choosing $f = \chi_V$, where $V = \{x \in S : \nu_n^S(x) = 0\}$ is the 'vertical part' of S . In this case the left hand side of (2.20) is equal to zero, and thus we get that, for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $V_{x'} = \emptyset$ (compare this example with part (iii) of Theorem 3.21).

3 BV functions and sets of finite perimeter

3.1 Vector-valued Radon measures

Let us recall some basic definitions and results of measure theory.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. We denote by $\mathcal{B}(\Omega)$ the σ -algebra of all Borel subsets of Ω . We say that a function $\nu : \mathcal{B}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^k$ is a *vector-valued Radon measure* (or a *real Radon measure*, if $k = 1$) on Ω if $\nu(\emptyset) = 0$ and ν is countably additive on $\mathcal{B}(\Omega)$. We denote by $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ the space of all Radon measures on Ω with values in $\mathbb{R}^k$. Recall that by Riesz' theorem this space can be identified with the dual of the Banach space $C_c(\Omega, \mathbb{R}^k)$, which is defined as the closure of the space $C_0(\Omega, \mathbb{R}^k)$ of continuous functions with compact support with respect

to the sup norm. In fact we may identify each Radon measure ν with the linear continuous functional on $C_c(\Omega, \mathbb{R}^k)$ defined by

$$L_\nu(\varphi) = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \varphi_i(x) d\nu_i(x) \quad \text{for any } \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^k),$$

where ν_i , $i = 1, \dots, k$, is the i -th component of the vector measure ν . From this identification it follows that the *total variation* of ν in Ω , which is defined by

$$|\nu|(\Omega) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \varphi_i(x) d\nu_i(x) : \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^k), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\},$$

coincides with the norm of the functional L_ν in the dual space of $C_c(\Omega, \mathbb{R}^k)$. We recall that the total variation of ν in an open subset A of Ω is defined similarly and is extended to any subset E of Ω by setting

$$|\nu|(E) = \inf \{ |\nu|(A) : E \subset A, A \text{ open subset of } \Omega \}.$$

It can be easily checked that in this way $|\nu|$ becomes a Borel measure on Ω .

We recall that a sequence ν_h of Radon measures in $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ is said to converge weakly* to a Radon measure ν if

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \varphi_i d(\nu_h)_i = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \varphi_i d\nu_i \quad \text{for any } \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^k).$$

Notice that the weak* convergence of ν_h is nothing else than the weak* convergence of the associated linear functionals L_{ν_h} in the dual space of $C_c(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Therefore, from the classical Banach–Alaoglu–Bourbaki theorem on the weak* compactness of the unit ball of the dual of a Banach space we deduce at once the following compactness result.

Theorem 3.1 (De La Vallée–Poussin theorem) *Let ν_h be a sequence of Radon measures in $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^k)$, such that $\sup_h |\nu_h|(\Omega) < \infty$. Then, there exists a subsequence ν_{h_r} weakly* converging to a Radon measure ν . Moreover, $|\nu|(\Omega) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} |\nu_{h_r}|(\Omega)$.*

Let ν be a vector-valued Radon measure and μ a Borel measure. We say that ν is *absolutely continuous* with respect to μ (in symbols, $\nu \ll \mu$) if $|\nu|(B) = 0$ for any Borel set B such that $\mu(B) = 0$. We say instead that ν is *singular* with respect to μ (and write $\nu \perp \mu$) if there exists a Borel set $B_0 \subset \Omega$ such that $\mu(B_0) = 0$ and $|\nu|(\Omega \setminus B_0) = 0$.

In the sequel we denote by $B_r(x)$ the open ball with center at x and radius r ; if the ball is centered at the origin we simply write B_r in place of $B_r(x)$. If μ is a Borel measure in Ω and $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is a μ -summable function, we denote by $f\mu$ the real Radon measure defined by $f\mu(B) = \int_B f(x) d\mu$, where B is a Borel subset of Ω . From this definition it follows that if $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is any bounded Borel function, then

$$\int_{\Omega} \varphi(x) d(f\mu) = \int_{\Omega} \varphi(x) f(x) d\mu.$$

If f is a μ -summable function with values into $\mathbb{R}^k$, the measure $f\mu$ is defined similarly and it turns out to be a Radon measure with values into $\mathbb{R}^k$. Clearly, $f\mu$ is absolutely continuous with respect to μ .

Theorem 3.2 (Besicovitch derivation theorem) *Let μ be a positive Radon measure in the open subset Ω of $\mathbb{R}^n$ and ν a Radon measure with values in $\mathbb{R}^k$. Then, for μ -a.e. $x \in \Omega$, there exists the limit*

$$(3.1) \quad \sigma(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}.$$

Moreover, $\nu = \sigma\mu + \nu^s$, where $\nu^s = \nu \llcorner E$ and $E \subset \Omega$ is a Borel set such that $\mu(E) = 0$.

Thus, the above theorem (see [3, Theorem 2.22]) states that ν can be decomposed into the sum of the absolutely continuous (with respect to μ) measure $\sigma\mu$ and the singular measure ν^s . This decomposition, known as *Radon-Nikodým decomposition* of ν is unique. The function σ , defined by (3.1) is called the *derivative of ν with respect to μ* and is often denoted with the symbol $\frac{d\nu}{d\mu}$. Notice that if ν is absolutely

continuous with respect to μ then $\nu = \sigma\mu$. Moreover, if $\sigma = \frac{d\nu}{d|\nu|}$, it can be easily checked that $|\sigma(x)| = 1$ for $|\nu|$ -a.e. $x \in \Omega$.

3.2 BV functions

Definition 3.3 (BV functions) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set and $u \in L^1(\Omega)$. We say that u is a *function with bounded variation* in Ω , shortly, a *BV function*, if there exists a Radon measure λ with values in $\mathbb{R}^n$ such that for any $i = 1, \dots, n$ and any $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi d\lambda_i.$$

The measure λ is also called the *measure derivative* of u and is denoted by the symbol Du . By $BV(\Omega)$ we denote the vector space of functions with bounded variation in Ω . This space can be endowed with the norm $\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$, thus becoming a Banach space.

Proposition 3.4 (Total variation of BV functions) *Let $u \in L^1(\Omega)$. Then, $u \in BV(\Omega)$ if and only if*

$$(3.3) \quad V = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\} < \infty.$$

Moreover the supremum V in (3.3) is equal to the total variation $|Du|(\Omega)$ of Du in Ω .

Proof. Let u be a function from $BV(\Omega)$. From (3.2) and from the definition of $|Du|(\Omega)$ we get that, for any $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$,

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_i(x) dD_i u = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_i(x) \sigma_i(x) d|Du| \leq |Du|(\Omega)$$

and from this inequality it follows that $V \leq |Du|(\Omega) < \infty$.

Conversely, if $V < \infty$, the linear functional $L : C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $L(\varphi) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi dx$ is continuous with respect to the sup norm. Since $C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ is a dense subspace of $C_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$, L can be extended in a unique way to a linear continuous functional $\bar{L}$ defined over the whole space. Moreover, $\|\bar{L}\|_{(C_c(\Omega, \mathbb{R}^n))'} = \|L\| = V$. Therefore, by the Riesz' theorem it follows that there exists a vector-valued Radon measure ν representing $\bar{L}$ and, in particular, L . Thus, we have that for any $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_i d\nu_i = L(\varphi) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi dx$$

and from Definition 3.3 it follows that u is in $BV(\Omega)$, that $Du = -\nu$ and that $|Du|(\Omega) = \|\bar{L}\| = \|L\| = V$. $\square$

Examples 3.5 (i) If u is a function from the Sobolev space $W^{1,1}(\Omega)$, denoting by ∇u the weak gradient of u , we have that $Du = \nabla u \mathcal{L}^n$, i.e. $D_i u(E) = \int_E \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$ for any Borel set $E \subset \Omega$.

(ii) Let $u(t) = \frac{t}{|t|}$, with $t \in (-1, 1)$. For any $\varphi \in C_0^1(-1, 1)$ we have

$$\int_{-1}^1 u \varphi' dt = \int_0^1 \varphi' dt - \int_{-1}^0 \varphi' dt = -2\varphi(0) = -2 \int_{-1}^1 \varphi d\delta_0,$$

where δ_0 is the Dirac measure concentrated at zero. In this case, the measure derivative $Du = 2\delta_0$ is singular with respect to the Lebesgue measure $\mathcal{L}^1$ and measures the 'jump' of u across the origin.

(iii) Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, and let Ω_i , $i = 1, \dots, N$, be pairwise disjoint open subsets of Ω such that $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ and, for any i , $\partial\Omega_i \cap \Omega$ is a hypersurface of class C^1 . For any i , let u_i be a function of class $C^1(\bar{\Omega}_i)$. Let us define $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, by setting $u(x) = u_i(x)$ if $x \in \Omega_i$. If φ is a function from $C_0^1(\Omega)$, from the classical Gauss–Green formulas we obtain that for any $s = 1, \dots, n$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_s} dx - \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i \cap \Omega} u_i \varphi \nu_s^{\Omega_i} d\mathcal{H}^{n-1},$$

where ν^{Ω_i} is the inner normal to the boundary of Ω_i . Thus, from this equality it follows that u is in $BV(\Omega)$ and that

$$Du = \left(\sum_{i=1}^N \nabla u_i \chi_{\Omega_i} \right) \mathcal{L}^n + \sum_{i=1}^N \nu^{\Omega_i} \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega_i.$$

Notice that in this case $\frac{dDu}{d\mathcal{L}^n} = \sum_{i=1}^N \nabla u_i \chi_{\Omega_i}$, while $\sum_{i=1}^N \nu^{\Omega_i} \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega_i$ is the singular part of Du with respect to the Lebesgue measure.

(iv) Let us recall the construction of the *Cantor-Vitali* function $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Denoting by C the Cantor set, then $C = \bigcap_{h=0}^{\infty} C_h$, where $C_0 = [0, 1]$ and any other set C_{h+1} is obtained by C_h by splitting each interval of C_h in three closed intervals of equal length and removing the interior of the middle one. Thus, each set C_h consists of 2^h pairwise disjoint closed intervals of size $1/3^h$. Let us now define a sequence of nondecreasing, piecewise affine functions $f_h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ by setting, for any $x \in [0, 1]$,

$$f_h(x) = \frac{3^h}{2^h} \int_0^x \chi_{C_h}(t) dt.$$

Then, one can easily show that f_h is a Cauchy sequence in $C([0, 1])$, hence it converges to a continuous, monotone function f . Moreover, since

$$\int_0^1 |f'_h(t)| dt = \int_0^1 f'_h(t) dt = 1,$$

Theorem 3.1 implies that the sequence of measures $f'_h \mathcal{L}^n$ has a subsequence $f'_{h_r} \mathcal{L}^n$ converging weakly* to a Radon measure λ and that λ is the distributional derivative of the Cantor-Vitali function f . In fact we have, for any $\varphi \in C_0^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 f(t) \varphi'(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{h_r}(t) \varphi'(t) dt = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 f'_{h_r}(t) \varphi(t) dt = - \int_0^1 \varphi(t) d\lambda.$$

Hence, f is in $BV(0, 1)$ and $Df = \lambda$. Moreover, a simple compactness argument shows that indeed the whole sequence $f'_h \mathcal{L}^n$ converges weakly* to Df . The reader may also check that Df is equal to $c \mathcal{H}^s \llcorner C$, where $s = \log 2 / \log 3$ and that the constant c is equal to $1/\mathcal{H}^s(C)$.

Arguing exactly as we just did in the Example 3.5 (iv) one can easily prove the following useful fact.

Proposition 3.6 *Let u_h be a sequence of functions from $BV(\Omega)$, converging in $L^1(\Omega)$ to a function u and such that $\sup_h |Du_h|(\Omega) < \infty$. Then, $u \in BV(\Omega)$ and the sequence Du_h converges weakly* in the sense of measures to Du .*

We shall refer to the convergence considered in Proposition 3.6 as to *weak* convergence in BV* . Namely, we say that a sequence u_h in $BV(\Omega)$ converges weakly* to a $BV(\Omega)$ function u if $u_h \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ and Du_h converges to Du weakly* in Ω in the sense of measures. In the sequel we shall use only weak* convergence since norm convergence in BV is too strong for most purposes.

The following approximation theorem states that although we cannot approximate BV functions by smooth functions in the norm sense (otherwise we would fall within the class of $W^{1,1}$ functions!), such an approximation holds in the weak* convergence sense.

Theorem 3.7 (Approximation of BV functions) *Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^n$ and u a function from $BV(\Omega)$. Then, there exists a sequence of functions u_h from $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ such that*

$$u_h \rightarrow u \quad \text{weakly}^* \text{ in } BV(\Omega), \quad \int_{\Omega} |\nabla u_h| dx \rightarrow |Du|(\Omega).$$

Proof. We shall prove the result in the model case $\Omega = \mathbb{R}^n$, since the general case presents only some extra technical complications which can be overcome arguing as in the proof of the classical result $H = W$ (see the proof of Theorem 3.9 in [3]). Let us denote by ϱ a positive, radially symmetric function with compact support in B_1 , such that $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho dx = 1$. For any $\varepsilon > 0$, we set $\varrho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varrho(x/\varepsilon)$ and

$$u_\varepsilon(x) = (u * \varrho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y) u(y) dy.$$

Then, $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ and for any $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \varrho_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \varrho_\varepsilon(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y) dD_i u(y),$$

for $i = 1, \dots, n$. Let us now fix $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. From the previous equality we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi, \nabla u_\varepsilon \rangle dx &= - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y) dD_i u(y) \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} dD_i u(y) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(x-y) \varphi_i(x) dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i * \varrho_\varepsilon)(y) dD_i u(y) \end{aligned}$$

and thus, since $\|\varphi * \varrho_\varepsilon\|_\infty \leq 1$, taking the supremum over all such functions φ , we get

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon| dx \leq |Du|(\mathbb{R}^n).$$

Therefore from Proposition 3.6 we have that the measures $\nabla u_\varepsilon \mathcal{L}^n$ converge weakly* to the measure Du and thus, by the lower semicontinuity of the total variation (see Theorem 3.1), we have also

$$|Du|(\mathbb{R}^n) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon| dx.$$

This inequality, together with (3.4), concludes the proof. $\square$

Remark 3.8 Notice that if $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ is a function such that its distributional gradient Du is a Radon measure, the same argument used in the proof above shows

that there exists a sequence u_h of functions from $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $u_h \rightarrow u$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ and

$$|Du|(\mathbb{R}^n) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| dx, \quad |D_i u|(\mathbb{R}^n) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right| dx \quad \text{for all } i = 1, \dots, n.$$

A similar remark applies to a function $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ whose distributional gradient is a Radon measure in Ω .

By using the approximation result Theorem 3.7 we can immediately generalize to BV the extension and compactness properties of the Sobolev space $W^{1,1}$.

Theorem 3.9 (Extension of BV functions) *Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary and let Ω_0 be an open set such that $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$. Then, there exists a linear continuous operator $T : BV(\Omega) \rightarrow BV(\Omega_0)$ such that, for any u in $BV(\Omega)$, Tu has compact support in Ω_0 and $Tu(x) = u(x)$ for all $x \in \Omega$.*

Theorem 3.10 (Compactness) *Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary, $n > 1$. Then, $BV(\Omega)$ is continuously imbedded in $L^p(\Omega)$ for any $1 \leq p \leq n/(n-1)$. Moreover, this imbedding is compact if $p < n/(n-1)$. In particular, if u_h is a bounded sequence in $BV(\Omega)$, there exists a subsequence u_{h_k} weakly* converging to a function $u \in BV(\Omega)$.*

3.3 Sets of finite perimeter

Definition 3.11 (Perimeter) Let E be a measurable subset of $\mathbb{R}^n$ and Ω an open set. The *perimeter* of E in Ω is defined by the quantity

$$P(E; \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \right\}.$$

If $P(E; \Omega) < \infty$, we say that E is a *set of finite perimeter* in Ω .

Thus, if E has finite perimeter in Ω , its characteristic function χ_E has a distributional derivative $D\chi_E$ which is a finite Radon measure with values in $\mathbb{R}^n$ and $P(E; \Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$. We shall write simply $P(E)$ to denote the perimeter of E in $\mathbb{R}^n$ and if B is any Borel set we define the perimeter of E in B by setting

$$P(E; B) = |D\chi_E|(B).$$

Notice that the measure $D\chi_E$ is concentrated on the topological boundary ∂E of E , since by the definition we get immediately that $|D\chi_E|(\Omega \setminus \partial E) = P(E; \Omega \setminus \partial E) = 0$. Moreover, if E has finite perimeter in Ω , then for any $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$(3.5) \quad \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_\Omega \chi_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_i(x) \, dD_i \chi_E(x).$$

Setting

$$\nu^E(x) = \frac{dD\chi_E}{d|D\chi_E|}(x),$$

whenever this derivative exists, (3.5) becomes

$$(3.6) \quad \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \langle \varphi, \nu^E \rangle d|D\chi_E| = - \int_{\partial E \cap \Omega} \langle \varphi, \nu^E \rangle d|D\chi_E|.$$

The vector $\nu^E(x)$ exists and has norm equal to 1 for $|D\chi_E|$ -a.e. $x \in \Omega$; $\nu^E(x)$ is called the *generalized inner normal* to E at x , a name which is justified by the integration by parts formula (3.6).

An important feature of the definition of perimeter is that it does not change if we modify E by a set of zero Lebesgue measure. Therefore if E is equivalent to E' , i.e. $\mathcal{L}^n(E \Delta E') = 0$, then $P(E; B) = P(E'; B)$ for any Borel set B .

Examples 3.12 (i) Let $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ be a bounded open set and $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ a Lipschitz function. Let us set $\mathcal{S}_u = \{(x', y) \in \mathbb{R}^n : x' \in U, y < u(x')\}$. Then, $\varphi \in C_0^1(U \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$

$$(3.7) \quad \int_{\mathcal{S}_u} \operatorname{div} \varphi(x) \, dx = - \int_{G_u} \langle \varphi, \nu_u \rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

where G_u is the graph of u and ν_u is defined as in (2.14). In fact, from Fubini's theorem and the area formula (2.11), we have

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \int_{\mathcal{S}_u} \operatorname{div} \varphi(x) \, dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_U dx' \int_{-\infty}^{u(x')} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x', y) \, dy + \int_U dx' \int_{-\infty}^{u(x')} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}(x', y) \, dy \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_U \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{-\infty}^{u(x')} \varphi_i(x', y) \, dy \right) dx' \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \int_U \varphi_i(x', u(x')) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx' + \int_U \varphi_n(x', u(x')) dx' \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \int_U \varphi_i(x', u(x')) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx' + \int_U \varphi_n(x', u(x')) dx' = - \int_{G_u} \langle \varphi, \nu_u \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Notice that from (3.7) and the area formula (2.9) it follows that

$$P(\mathcal{S}_u; U \times \mathbb{R}) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla u(x')|^2} \, dx', \quad D\chi_{\mathcal{S}_u} = \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner G_u.$$

(ii) By the previous example one can easily get that if E is a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary, then E is a set of finite perimeter and $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$. Moreover, denoting by $\nu(x)$ the interior normal to ∂E at x (which exists for $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $x \in \partial E$) we have also that $D\chi_E = \nu \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E$.

(iii) Let us go back to the first example and, keeping the same notation, let us now assume that $u \in BV(U)$. Let $u_h : U \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$, be a sequence of smooth functions, such that $u_h \rightarrow u$ in $L^1(U)$ and $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. in U and $\int_U |\nabla u_h| dx' \rightarrow |Du|(U)$. From (3.8) we get that for any function $\varphi \in C_0^1(U \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{S_{u_h}} \operatorname{div} \varphi(x) dx &= - \sum_{i=1}^{n-1} \int_U \varphi_i(x', u_h(x')) \frac{\partial u_h}{\partial x_i} dx' + \int_U \varphi_n(x', u_h(x')) dx' \\ &\leq \int_U |\nabla u_h| dx' + \mathcal{L}^{n-1}(U) \end{aligned}$$

and thus, letting h go to ∞ we conclude that

$$\int_{S_u} \operatorname{div} \varphi(x) dx \leq |Du|(U) + \mathcal{L}^{n-1}(U),$$

hence S_u is a set of finite perimeter in $U \times \mathbb{R}$. Notice that the inequality above implies in particular that $P(S_u; U \times \mathbb{R})$ is less than or equal to the right hand side. However, it can be proved that for any Borel set $B \subset U$ the perimeter of S_u inside $B \times \mathbb{R}$ is given by

$$P(S_u; B \times \mathbb{R}) = \int_B \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx' + |D^s u|(B),$$

where we have denoted by ∇u the derivative of Du with respect to $\mathcal{L}^{n-1}$ and by $D^s u$ the singular part of Du .

(iv) Let $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1/2^i}(q_i)$, where q_i is a countable, dense set in $\mathbb{R}^n$, with $n > 1$. Notice that $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, but $\mathcal{L}^n(\partial E) = \infty$. Let us check that E has finite perimeter. In fact, if $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div} \varphi dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1/2^i}(q_i)} \operatorname{div} \varphi dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^N B_{1/2^i}(q_i)} \operatorname{div} \varphi dx \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial(\bigcup_{i=1}^N B_{1/2^i}(q_i))} \langle \nu, \varphi \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1} \left(\partial \left(\bigcup_{i=1}^N B_{1/2^i}(q_i) \right) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{1/2^i}(q_i)) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n\omega_n}{2^{i(n-1)}} < \infty, \end{aligned}$$

hence $P(E) < \infty$.

Proposition 3.13 (Elementary properties of perimeters) *Let E, F be measurable sets and Ω an open set in $\mathbb{R}^n$. Then,*

- (i) $P(E; \Omega) = P(\mathbb{R}^n \setminus E; \Omega)$;
- (ii) $P(E \cup F; \Omega) + P(E \cap F; \Omega) \leq P(E; \Omega) + P(F; \Omega)$;

(iii) if $(E_h)_{h \in \mathbb{N}}$ and E are measurable sets and $\chi_{E_h} \rightarrow \chi_E$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, then

$$P(E; \Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} P(E_h; \Omega).$$

Proof. (i) and (iii) are straightforward consequences of the definition of perimeter. To prove (ii), let us recall that from Theorem 3.7 it follows that there exist two sequences of $C^\infty(\Omega)$ functions u_h and v_h , converging respectively to χ_E and χ_F in $L^1(\Omega)$ and such that

$$(3.9) \quad P(E; \Omega) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_h| dx, \quad P(F; \Omega) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_h| dx.$$

By truncating the functions u_h, v_h we may also suppose, without loss of generality, that $0 \leq u_h \leq 1$, $0 \leq v_h \leq 1$, and that u_h, v_h are locally Lipschitz continuous in Ω . Then, one can easily check that $u_h v_h$ converges to $\chi_E \chi_F = \chi_{E \cap F}$ in $L^1(\Omega)$ and that $u_h + v_h - u_h v_h$ converges in $L^1(\Omega)$ to $\chi_E + \chi_F - \chi_E \chi_F = \chi_{E \cup F}$. Therefore, since

$$P(E \cup F; \Omega) + P(E \cap F; \Omega) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_h + v_h - u_h v_h)| dx + \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_h v_h)| dx,$$

(ii) follows immediately from (3.9) and from the inequality

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_h + v_h - u_h v_h)| dx + \int_{\Omega} |\nabla(u_h v_h)| dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_h| dx + \int_{\Omega} |\nabla v_h| dx.$$

□

We have already observed that if E is a set of finite perimeter then the measure $|D\chi_E|$ is concentrated on the boundary of E . However, by using the Besicovitch derivation Theorem 3.2 we may characterize more precisely the support of $|D\chi_E|$.

Definition 3.14 (Reduced boundary) Let E be a measurable set in $\mathbb{R}^n$ and let Ω_0 be the largest open set such that E has (locally) finite perimeter in Ω_0 . The *reduced boundary* $\partial^* E$ of E is the collection of all points $x \in \Omega_0$ such that the limit

$$(i) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D\chi_E(B_r(x))}{|D\chi_E(B_r(x))|} = \frac{dD\chi_E}{|dD\chi_E|}(x) = \nu^E(x)$$

exists and moreover

$$(ii) \quad |\nu^E(x)| = 1.$$

From Theorem 3.2 we know that conditions (i) and (ii) in Definition 3.14 are satisfied $|D\chi_E|$ almost everywhere in Ω_0 , i.e. $|D\chi_E|(\Omega_0 \setminus \partial^* E) = 0$. The following result (see [3, Theorem 3.59]) contains the main properties of the reduced boundary $\partial^* E$. To this aim, if $x \in \partial^* E$, let us denote by $\pi_{\nu^E(x)}$ the $(n-1)$ -hyperplane orthogonal to the normal versor $\nu^E(x)$ and by $H_{\nu^E(x)}^+$ the half-space $\{z : \langle z, \nu^E(x) \rangle > 0\}$.

Theorem 3.15 (De Giorgi's structure theorem) *Let E be a measurable subset of $\mathbb{R}^n$. Then, the reduced boundary $\partial^* E$ of E is an $(n-1)$ -rectifiable set and $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$. Moreover, for every $x \in \partial^* E$,*

$$(i) \quad \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \frac{\partial^* E - x}{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \pi_{\nu^E(x)} \quad \text{weakly* in the sense of measures,}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0^+$, and

$$(ii) \quad \chi_{\frac{E-x}{\varepsilon}} \rightarrow \chi_{H_{\nu^E(x)}^+} \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

An immediate consequence of the above theorem is that if E is a set of finite perimeter in Ω and $B \subset \Omega$ is any Borel set, then $P(E; B) = |D\chi_E|(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial^* E)$. Moreover, from (3.6) we have that for any $\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, then

$$\int_{E \cap \Omega} \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\partial^* E \cap \Omega} \langle \varphi, \nu^E \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

By comparing Theorem 2.16 with part (i) of Theorem 3.15 we get that for every $x \in \partial^* E$

$\pi_{\nu_x^E}$ is the approximate tangent plane to $\partial^* E$ at x .

The following result is a very useful version of the coarea formula for BV functions.

Theorem 3.16 (Coarea formula in BV) *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and u a function from $BV(\Omega)$. Then for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in \mathbb{R}$ the level set $\{u > t\}$ has finite perimeter in Ω and for any Borel set $B \subset \Omega$*

$$(3.10) \quad |Du|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; B) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(B \cap \partial^* \{u > t\}) \, dt.$$

Moreover, if $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ is a Borel function, then

$$(3.11) \quad \int_{\Omega} f(x) \, d|Du|(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\partial^* \{u > t\} \cap \Omega} f(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Proof. STEP 1 Let us first assume that $u \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$. Then, by Sard's theorem, for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in \mathbb{R}$, $\{u > t\}$ is an open set with C^∞ boundary $\{u = t\}$ and the assertion is an immediate consequence of the coarea formula (2.19). However, we give here a self contained proof of (3.10) and (3.11) which does not use the coarea formula for rectifiable sets (2.18).

To this aim, let us fix a function $f \in C_0^1(\Omega)$ and a function $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, such that $0 \leq \psi(t) \leq 1$. We set $\mathcal{S}_u = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t < u(x)\}$ and recall that for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (\inf u, \sup u)$, the interior normal to the boundary of $\{u > t\}$ is given by $\nabla u / |\nabla u|$. Therefore, by Fubini's theorem and by the classical divergence theorem, we get

$$\begin{aligned} (3.12) \quad & \int_{\mathcal{S}_u \cap (\Omega \times \mathbb{R})} \psi(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(x) \frac{\nabla_i u}{|\nabla u|} \right) \, dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \, dt \int_{\{u > t\}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(x) \frac{\nabla_i u}{|\nabla u|} \right) \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \, dt \int_{\{u=t\}} f(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Let $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ be the map $\Phi(x, t) = \left(f(x)\psi(t) \frac{\nabla_1 u}{|\nabla u|}, \dots, f(x)\psi(t) \frac{\nabla_n u}{|\nabla u|}, 0 \right)$ and denote by ν the interior normal to $\mathcal{S}_u$. Since for any point on the graph G_u of u we have $\nu = \left(\frac{\nabla_1 u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \dots, \frac{\nabla_n u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$, using the divergence theorem again, we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_u \cap (\Omega \times \mathbb{R})} \operatorname{div}_{x,t} \Phi \, dx dt &= - \int_{\partial(\mathcal{S}_u \cap (\Omega \times \mathbb{R}))} \langle \Phi, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n \\ &= - \int_{G_u} f(x)\psi(t) \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\mathcal{H}^n(x, t) = - \int_{\Omega} f(x)\psi(u(x)) |\nabla u| \, dx. \end{aligned}$$

Since the left hand side in this equality and the left hand side in (3.12) are equal, we obtain that

$$\int_{\Omega} f(x)\psi(u(x)) |\nabla u| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \, dt \int_{\{u=t\}} f(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

hence (3.11) follows by letting $\psi \uparrow 1$. The case $f = \chi_A$, where A is any open subset of Ω , then follows by approximating χ_A by an increasing sequence of nonnegative functions $f_h \in C_0^1(\Omega)$.

STEP 2 Let us now assume that u is a BV function and prove (3.10) for an open set $A \subset \Omega$. Since the perimeter of $\{u > t\}$ does not change if we replace u by a function coinciding $\mathcal{L}^n$ -a.e. with u , we may assume without loss of generality that u is a Borel function, hence also $(x, t) \rightarrow \chi_{\{u>t\}}(x)$ is a Borel function in $A \times \mathbb{R}$. Notice that for any x in A

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{u>t\}}(x) \, dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \chi_{\{u>t\}}(x)) \, dt.$$

Therefore, for any $\varphi \in C_0^1(A, \mathbb{R}^n)$ with $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$, we get

$$\begin{aligned} \int_A u \operatorname{div} \varphi \, dx &= \int_A \operatorname{div} \varphi \, dx \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\{u>t\}}(x) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_A \chi_{\{u>t\}}(x) \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; A) \, dt, \end{aligned}$$

hence, we have

$$(3.13) \quad |Du|(A) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; A) \, dt.$$

To show the opposite inequality, we use Theorem 3.7, thus getting a sequence u_h of smooth functions converging to u in $L^1(A)$ and $\mathcal{L}^n$ -a.e. in A , such that $\int_A |\nabla u_h| \, dx \rightarrow |Du|(A)$. Since $\mathcal{L}^n(\{u = t\}) = 0$ for $\mathcal{L}^1$ -a.e. t and for all such t the

functions $\chi_{\{u_h > t\}}$ converge to $\chi_{\{u > t\}}$ almost everywhere in A , from Fatou's lemma and from Step 1 we get that

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; A) dt &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{h \rightarrow \infty} P(\{u_h > t\}; A) dt \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u_h > t\}; A) dt = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_A |\nabla u_h| dx = |Du|(A). \end{aligned}$$

This inequality, together with (3.13), proves (3.10) when B is an open set.

STEP 3 If $K \subset \Omega$ is a compact set, (3.10) follows at once from Step 2, by approximating K from above by a decreasing sequence of open sets. Let us now assume that $B \subset \Omega$ is a Borel set such that $|Du|(B) = 0$, then there exists a decreasing sequence of open sets $A_h \subset \Omega$, such that $B \subset A_h$ for any h and $\lim_{h \rightarrow \infty} |Du|(A_h) = 0$. From Step 2 we then get

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; A_h) dt = 0$$

and from this equality we immediately have that $P(\{u > t\}; B) = 0$ for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in \mathbb{R}$. This proves (3.10) when B is a Borel set such that $|Du|(B) = 0$. The general case is obtained by writing any Borel set B in Ω as the union of an increasing sequence of compact sets K_h and of a Borel set B_0 such that $|Du|(B_0) = 0$. Finally, (3.11) immediately follows from (3.10) and Lemma 2.14. $\square$

As a consequence of the coarea formula, we have the following approximation result for sets of finite perimeter.

Theorem 3.17 *Let E be a set of finite perimeter in $\mathbb{R}^n$ with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, $n \geq 2$. Then, there exists a sequence of bounded open sets E_h with C^∞ boundaries, such that $\chi_{E_h} \rightarrow \chi_E$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ and $P(E_h) \rightarrow P(E)$.*

Proof. By Theorem 3.7 there exists a sequence of functions $u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap BV(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq u_h \leq 1$, converging in $L^1(\mathbb{R}^n)$ to χ_E and such that

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| dx = P(E).$$

By approximating each u_h in the norm of $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ with a smooth function with compact support, it is clear that we may assume that each u_h has compact support. Therefore, by the coarea formula (3.10) we have that

$$\int_0^1 \liminf_{h \rightarrow \infty} P(\{u_h > t\}) dt \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_0^1 P(\{u_h > t\}) dt \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| dx = P(E).$$

By Sard's theorem, for any h , $\{u_h > t\}$ has C^∞ boundary for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t \in (0, 1)$. Thus, we get that there exists $t \in (0, 1)$ such that $\{u_h > t\}$ is a bounded open set

with C^∞ boundary for any h and $\liminf_{h \rightarrow \infty} P(\{u_h > t\}) \leq P(E)$. Passing possibly to a subsequence, we may assume that this $\liminf$ is indeed a limit, hence

$$(3.14) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} P(\{u_h > t\}) \leq P(E).$$

Notice that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E - \chi_{\{u_h > t\}}| dx &= \mathcal{L}^n(E \setminus \{u_h > t\}) + \mathcal{L}^n(\{u_h > t\} \setminus E) \\ &\leq \frac{1}{1-t} \int_{E \setminus \{u_h > t\}} |\chi_E - u_h| dx + \frac{1}{t} \int_{\{u_h > t\} \setminus E} |u_h - \chi_E| dx, \end{aligned}$$

hence, $\chi_{\{u_h > t\}} \rightarrow \chi_E$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ and thus, by the lower semicontinuity of perimeters and (3.14), we obtain the assertion with $E_h = \{u_h > t\}$. $\square$

We can now pass to the proof of the isoperimetric inequality in dimension $n > 1$. The one dimensional case is in fact a simple consequence of the following characterization of the sets of finite perimeter ([3, Proposition 3.52]).

Proposition 3.18 *Let $E \subset \mathbb{R}$ be a set of finite perimeter. Then, there exist N open intervals (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, N$, such that $-\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_N < b_N \leq +\infty$, with the property that E is equivalent to $\bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$. Moreover $P(E) = \#\{i : a_i > -\infty\} + \#\{i : b_i < +\infty\}$.*

Notice that from the above characterization it follows that if E is a set of finite perimeter in $\mathbb{R}$ and $\mathcal{L}^1(E) < \infty$, then $P(E) \geq 2$.

The isoperimetric inequality in higher dimension is a consequence of the classical Sobolev imbedding theorem.

Theorem 3.19 *Let $n > 1$. There exists a positive constant $\gamma(n) > 0$ such that for any function $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ the following inequality holds*

$$(3.15) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx.$$

Theorem 3.20 (Isoperimetric inequality) *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter with finite measure. Then,*

$$(3.16) \quad \left[\mathcal{L}^n(E) \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma(n) P(E),$$

where $\gamma(n)$ is the constant appearing in (3.15). Moreover the two inequalities (3.15) and (3.16) are equivalent.

Proof. STEP 1 By Theorem 3.7 we can approximate χ_E by a sequence u_h of functions from $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ such that

$$u_h(x) \rightarrow \chi_E(x) \quad \text{for } \mathcal{L}^n\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| dx \rightarrow |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = P(E).$$

Then, (3.16) follows immediately from inequality (3.15) applied to the functions u_h .

STEP 2 To prove that (3.16) implies (3.15), we notice that it is enough to consider only the case of a nonnegative function $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, from which the general case easily follows. To this aim, let us fix u and use the coarea formula (3.10) and the assumption (3.16), thus getting

$$(3.17) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx = \int_0^\infty P(\{u > t\}) dt \geq \frac{1}{\gamma(n)} \int_0^\infty \left[\mathcal{L}^n(\{u > t\}) \right]^{\frac{n-1}{n}} dt.$$

Let us set, for any $t \geq 0$, $g(t) = \|\min\{u, t\}\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}$ and notice that g is a non decreasing Lipschitz continuous function. In fact, if $0 \leq s < t$, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq g(t) - g(s) &\leq \|\min\{u, t\} - \min\{u, s\}\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\{u>s\}} |\min\{u, t\} - s|^{\frac{n-1}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq |t - s| \left[\mathcal{L}^n(\{u > s\}) \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq |t - s| (\text{supp } u)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Being Lipschitz continuous, g is differentiable for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $t > 0$. Moreover, from the inequalities above it follows that $0 \leq g'(t) \leq \left[\mathcal{L}^n(\{u > t\}) \right]^{\frac{n-1}{n}}$, whenever $g'(t)$ exists. Therefore, from (3.17) we get

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty g'(t) dt \leq \int_0^\infty \left[\mathcal{L}^n(\{u > t\}) \right]^{\frac{n-1}{n}} dt \leq \gamma(n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx$$

and (3.15) follows. $\square$

It can be proved that if $E \subset \mathbb{R}^n$ is a set of finite perimeter, then either E or $\mathbb{R}^n \setminus E$ has finite measure (see [3, Theorem 3.46]). Therefore, inequality (3.16) can be restated in the form

$$\left[\min\{\mathcal{L}^n(E), \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E)\} \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma(n) P(E).$$

We conclude this section with a result concerning the one dimensional sections of sets of finite perimeter. Roughly speaking, the theorem below states that if E is a set of finite perimeter and $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ is a fixed direction then, for $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. point z in the hyperplane π_ν orthogonal to ν , the one dimensional section $E_{z,\nu}$ is a set of finite perimeter in $\mathbb{R}$. Moreover, the section $(\partial^* E)_{z,\nu}$ of the reduced boundary of E coincides with the reduced boundary $\partial^* E_{z,\nu}$ of the section of E . However, in the statement of the theorem, in order to simplify the notation, we consider only

sections parallel to the n -th coordinate axis. To this aim, we denote the points in $\mathbb{R}^n$ also by (x', y) , where $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, and if E is any set we denote by $E_{x'}$ the section

$$E_{x'} = \{y \in \mathbb{R} : (x', y) \in E\}.$$

Moreover, if ν is any vector in $\mathbb{R}^n$, we denote by ν_y the n -th component of ν .

Theorem 3.21 (Vol'pert) *Let E be a set of finite perimeter in $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Then, for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$*

- (i) $E_{x'}$ is a set of finite perimeter in $\mathbb{R}$;
- (ii) $\partial^* E_{x'} = (\partial^* E)_{x'}$;
- (iii) $\nu_y^E(x', y) \neq 0$ for every $(x', y) \in \partial^* E_{x'}$; moreover there exists a piecewise constant function $\chi_{x'}^* : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, with $\chi_{x'}^*(y) = \chi(x', y)$ for $\mathcal{L}^1$ -a.e. $y \in \mathbb{R}$, such that

$$(3.18) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow y^-} \chi_{x'}^*(z) = 0, & \lim_{z \rightarrow y^+} \chi_{x'}^*(z) = 1 & \text{if } \nu_y^E(x', y) > 0, \\ \lim_{z \rightarrow y^-} \chi_{x'}^*(z) = 1, & \lim_{z \rightarrow y^+} \chi_{x'}^*(z) = 0 & \text{if } \nu_y^E(x', y) < 0. \end{cases}$$

Proof. (i) From Remark 3.8 it follows that there exists a sequence of smooth functions u_h such that

$$(3.19) \quad u_h \rightarrow \chi_E \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| dx \rightarrow |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = P(E)$$

and that

$$(3.20) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_i u_h| dx = |D_i \chi_E|(\mathbb{R}^n) \quad \text{for all } i = 1, \dots, n.$$

From (3.19), using Fubini's theorem, we have that for any $R > 0$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{-R}^R |u_h(x', y) - \chi_E(x', y)| dy = 0.$$

From this equality, by a simple diagonalization argument, it follows that up to a (not relabelled) subsequence $u_h(x', \cdot) \rightarrow \chi_E(x', \cdot) = \chi_{E_{x'}}$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Hence, by the lower semicontinuity of the total variation, we have

$$P(E_{x'}) = P(E_{x'}, \mathbb{R}) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\nabla_y u_h(x', y)| dy.$$

Integrating this inequality and using Fatou's lemma we have, from (3.20),

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(E_{x'}) dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\nabla_y u_h(x', y)| dy dx' \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_y u_h(x)| dx = |D_y \chi_E|(\mathbb{R}^n) < \infty, \end{aligned}$$

hence we get in particular that, for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $P(E_{x'}) < \infty$, i.e. $E_{x'}$ has finite perimeter.

(ii) Let us fix $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ with $\|\varphi\| \leq 1$. We have

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dD_y \chi_E &= - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_{x'}}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x', y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(E_{x'}) dx' \end{aligned}$$

and, passing to the supremum over all φ , we get that

$$(3.23) \quad |D_y \chi_E|(\mathbb{R}^n) \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(E_{x'}) dx'.$$

Therefore from this inequality and from (3.21) we conclude that in (3.23) the equality holds. With exactly the same argument it can be proved that if Ω is any open set in $\mathbb{R}^n$, then

$$|D_y \chi_E|(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(E_{x'}; \Omega_{x'}) dx'$$

and, arguing as in the Step 3 of the proof of Theorem 3.16, that this equality still holds if we replace Ω by any Borel set $B \subset \mathbb{R}^n$

$$|D_y \chi_E|(B) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(E_{x'}; B_{x'}) dx'.$$

Since $|\nu_y^E| = \frac{d|D_y \chi_E|}{d|D \chi_E|}$, using Theorem 3.15 this equality can be written in the form

$$\int_{\partial^* E \cap B} |\nu_y^E(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{H}^0(\partial^* E_{x'} \cap B) dx'.$$

Therefore, using Lemma 2.14, we may conclude that if $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ is any Borel function then

$$(3.24) \quad \int_{\partial^* E} f(x) |\nu_y^E(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} f(x', y) d\mathcal{H}^0(y).$$

On the other hand, from the coarea formula (2.20) we have also that

$$(3.25) \quad \int_{\partial^* E} f(x) |\nu_y^E(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{(\partial^* E)_{x'}} f(x', y) d\mathcal{H}^0(y).$$

Let us fix $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ and take $f(x', y) = g(x')\psi(y)$, where g is any function in $C_0(\mathbb{R}^{n-1})$. By comparing (3.25) with (3.24) we get that for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$(3.26) \quad \int_{\partial^* E_{x'}} \psi(y) d\mathcal{H}^0(y) = \int_{(\partial^* E)_{x'}} \psi(y) d\mathcal{H}^0(y).$$

Therefore, by taking a dense sequence in $C_0(\mathbb{R})$, we conclude easily that there exists a null set $W_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, such that for any $x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus W_0$ (3.26) holds for all $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ and this immediately implies that $\partial^* E_{x'} = (\partial^* E)_{x'}$.

(iii) Let us set $Z = \{x \in \partial^* E : \nu_y^E(x) = 0\}$ and let us apply (3.24) with $f = \chi_Z$, thus getting

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \chi_Z(x', y) d\mathcal{H}^0(y) = 0.$$

Hence, we get that for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\nu_y^E(x', y) \neq 0$ for all y such that $(x', y) \in \partial^* E_{x'}$. To prove the second part of (iii), we fix $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, use again the coarea formula (2.20) and the fact that $Z_{x'} = \emptyset$ for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. x' , thus getting

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dD_y \chi_E = \int_{\partial^* E \setminus Z} \frac{\varphi \nu_y^E}{|\nu_y^E|} |\nu_y^E| d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \varphi \text{sign}(\nu_y^E) d\mathcal{H}^0(y)$$

and comparing this equalities with (3.22) we conclude that

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \varphi \text{sign}(\nu_y^E) d\mathcal{H}^0(y) = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{E_{x'}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x', y) dy.$$

Hence, arguing as in the final part of the proof of (ii), we conclude that there exists a null set $V_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ such that for all $x' \notin V_0$ and for all $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\partial^* E_{x'}} \psi \text{sign}(\nu_y^E) d\mathcal{H}^0(y) = - \int_{E_{x'}} \psi' dy.$$

Let us fix $x' \notin V_0$. By Proposition 3.18 $E_{x'}$ is equivalent to the union of finitely many disjoint open intervals (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, N$, with $b_i < a_j$ if $i < j$, and the equality above immediately implies that

$$\nu_y^E(x', a_i) > 0, \quad \nu_y^E(x', b_j) < 0 \quad \text{for all } i, j = 1, \dots, N \text{ such that } -\infty < a_i, b_j < \infty.$$

Therefore the assertion follows by taking $\chi_{x'}^* = \sum_{i=1}^N \chi_{(a_i, b_i)}$. $\square$

4 The isoperimetric theorem

4.1 Steiner symmetrization of sets of finite perimeter

In this section we study the properties of sets of finite perimeter in relation to the Steiner symmetrization. To this aim, let us introduce two quantities which will be relevant for the sequel.

If E is any subset of $\mathbb{R}^n$, for all $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ we set

$$\ell(x') = \mathcal{L}^1(E_{x'}) = \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R} : (x', y) \in E\}),$$

$$\pi(E)^+ = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \ell(x') > 0\}.$$

Remark 4.1 Since $E_{x'}$ is a null set for all $x' \notin \pi(E)^+$, Theorem 3.21 can be equivalently restated by saying that if E is a set of finite perimeter in $\mathbb{R}^n$, then there exists a Borel set $G_E \subset \pi(E)^+$, such that $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus G_E) = 0$ and (i), (ii) and (iii) hold for all $x' \in G_E$. Moreover, if $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, we may also assume without loss of generality that $\mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty$ for all $x' \in G_E$.

We discuss some properties of the distribution function ℓ .

Lemma 4.2 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter, with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Then, $\ell \in BV(\mathbb{R}^{n-1})$ and for any bounded Borel function $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$(4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') dD_i \ell(x') = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x') dD_i \chi_E(x), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Moreover, if $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is a Borel set, then

$$(4.2) \quad |D\ell|(B) \leq P(E; B \times \mathbb{R}).$$

Proof. The fact that $\ell \in L^1(\mathbb{R}^n)$ follows immediately from the assumption $\mathcal{L}^n(E) < \infty$.

Let us fix $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$ and an increasing sequence ψ_h of functions from $C_0^1(\mathbb{R})$ pointwise converging to 1, such that $0 \leq \psi_h \leq 1$. By Fubini's theorem, we have for any $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} (4.3) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \ell(x') dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') dx' \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x', y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \chi_E(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \psi_h(y) \chi_E dx \\ &= - \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x') \psi_h(y) dD_i \chi_E = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x') dD_i \chi_E. \end{aligned}$$

From these equalities, recalling that $\nu^E = \frac{dD\chi_E}{d|D\chi_E|}$, we get that for every $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^{n-1})$ with $\|\phi\|_\infty \leq 1$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ell(x') \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x') dx' = - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i(x') \nu_i^E(x) d|D\chi_E| \leq |D\chi_E|(\mathbb{R}^n),$$

hence $\ell \in BV(\mathbb{R}^{n-1})$. Moreover, from (4.3) it follows that for any $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') dD_i \ell(x') = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \ell(x') dx' = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x') dD_i \chi_E(x),$$

$i = 1, \dots, n-1$, hence, by approximation, (4.1) follows for any bounded continuous function $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. To prove the general case of a bounded Borel function, let us introduce the Borel measure μ defined for any Borel set $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ by setting

$$\mu(B) = |D\ell|(B) + |D\chi_E|(B \times \mathbb{R}).$$

Given a bounded Borel function $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, by Lusin's theorem there exists a continuous function φ_ε such that $\mu(\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \varphi_\varepsilon(x') \neq \varphi(x')\}) < \varepsilon$ and $\|\varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$. Since (4.1) holds for φ_ε , it is easily seen that the absolute value of the difference of the left hand and right hand side of (4.1) for such a φ does not exceed $4\varepsilon\|\varphi\|_\infty$. Thus (4.1) holds also for φ thanks to the arbitrariness of ε . Finally, (4.2) follows immediately from (4.1) if $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is an open set and by a simple approximation argument in the general case. $\square$

Let us now give an explicit formula to calculate the absolutely continuous part of $D\ell$ with respect to $\mathcal{L}^{n-1}$.

Lemma 4.3 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter, with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Then, for any $i = 1, \dots, n-1$,*

$$(4.4) \quad \frac{dD_i\ell}{d\mathcal{L}^{n-1}}(x') = \int_{\partial^* E_{x'}} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y) \quad \text{for } \mathcal{L}^{n-1}\text{-a.e. } x' \in \pi(E)^+.$$

Proof. Let G_E be the set defined in Remark 4.1. Then for any $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^{n-1})$, using (4.1), the fact that $D_i\chi_E = \nu_i^E|D\chi_E|$ and Theorem 3.15, we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') \chi_{G_E}(x') dD_i\ell(x') &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x') \chi_{G_E}(x') dD_i\chi_E(x) \\ &= \int_{\partial^* E} \varphi(x') \chi_{G_E}(x') \nu_i^E(x) d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Since, for any $x' \in G_E$, $\nu_y^E(x', y) \neq 0$ for all y such that $(x', y) \in \partial^* E$, from coarea formula (2.20) and from the equalities above we have

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') \chi_{G_E}(x') dD_i\ell(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x') \chi_{G_E}(x') dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y).$$

Therefore from the arbitrariness of φ we get that

$$\chi_{G_E}(x') D_i\ell = \chi_{G_E}(x') \left(\int_{\partial^* E_{x'}} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y) \right) \mathcal{L}^{n-1},$$

hence (4.4) follows, since $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus G_E) = 0$. $\square$

Remark 4.4 Let us denote by E^s the Steiner symmetral of E with respect to the y direction, where E is a set of finite perimeter with finite measure. Since

$$E^s = \{(x', y) : -\ell(x')/2 < y < \ell(x')/2\},$$

$E^s = F_1 \cap F_2$, where $F_1 = \{(x', y) \in \mathbb{R}^{n-1} : y < \ell(x')/2\}$ and $F_2 = \{(x', y) \in \mathbb{R}^{n-1} : y > -\ell(x')/2\}$. From Examples 3.12 (iii) we know that F_1, F_2 are sets of finite perimeter, hence Proposition 3.13 implies that also E^s is a set of finite perimeter. In particular, we may apply Lemma 4.3 to E^s . Since $\pi(E)^+ = \pi(E^s)^+$

and E and E^s have the same distribution function ℓ , from (4.4) we get that for any $i = 1, \dots, n-1$

$$(4.5) \quad \frac{dD_i \ell}{d\mathcal{L}^{n-1}}(x') = 2 \frac{\nu_i^{E^s}(x', \ell(x')/2)}{|\nu_y^{E^s}(x', \ell(x')/2)|} \quad \text{for } \mathcal{L}^{n-1}\text{-a.e. } x' \in \pi(E)^+.$$

Lemma 4.5 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter, with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. For any Borel set $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$*

$$(4.6) \quad P(E^s; B \times \mathbb{R}) \leq P(E; B \times \mathbb{R}) + \int_{\partial^* E^s \cap (B \times \mathbb{R})} |\nu_y^{E^s}| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Proof. Let us fix an open set $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ and let ℓ_h be a sequence of nonnegative smooth functions converging to ℓ in $L^1(U)$ and $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. in U , such that $\int_U |\nabla \ell_h| dx' \rightarrow |D\ell|(U)$. Setting, for any $h \in \mathbb{N}$,

$$E_h = \left\{ (x', y) \in U \times \mathbb{R} : -\frac{\ell_h(x')}{2} < y < \frac{\ell_h(x')}{2} \right\},$$

we have that $\chi_{E_h}(x) \rightarrow \chi_{E^s}(x)$ for $\mathcal{L}^n$ -a.e. $x \in U \times \mathbb{R}$. If $\varphi \in C_0^1(U \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, we get

$$\begin{aligned} \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E_h}(x) \operatorname{div} \varphi dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_U dx' \int_{-\frac{\ell_h(x')}{2}}^{\frac{\ell_h(x')}{2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dy + \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E_h}(x) \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_U \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{-\frac{\ell_h(x')}{2}}^{\frac{\ell_h(x')}{2}} \varphi_i dy \right) dx' - \frac{1}{2} \int_U \left[\varphi_i \left(x', \frac{\ell_h(x')}{2} \right) - \varphi_i \left(x', -\frac{\ell_h(x')}{2} \right) \right] \frac{\partial \ell_h}{\partial x_i} dx' \right\} \\ &\quad + \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E_h} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_U |\nabla \ell_h| \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \left[\varphi_i \left(x', \frac{\ell_h(x')}{2} \right) - \varphi_i \left(x', -\frac{\ell_h(x')}{2} \right) \right]^2} dx' + \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E_h} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx \\ &\leq \int_U |\nabla \ell_h| dx' + \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E_h} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx. \end{aligned}$$

From the previous inequality, letting h tend to ∞ , we get that

$$\int_{U \times \mathbb{R}} \chi_E(x) \operatorname{div} \varphi dx \leq |D\ell|(U) + \int_{U \times \mathbb{R}} \chi_{E^s} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx \leq |D\ell|(U) + |D_y \chi_{E^s}|(U \times \mathbb{R}),$$

hence, taking the supremum over φ , from (4.2) we obtain (4.6) for the case when B is an open set. Then, the general case easily follows by an approximation argument. $\square$

The following result describes the action of the Steiner symmetrization over sets of finite perimeter.

Theorem 4.6 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. For any Borel set $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$*

$$(4.7) \quad P(E^s; B \times \mathbb{R}) \leq P(E; B \times \mathbb{R}).$$

In particular, $P(E^s) \leq P(E)$.

Proof. Fix a Borel set B in $\mathbb{R}^{n-1}$. Denoting by

G_E and G_{E^s} the sets associated to E and E^s as in Remark 4.1, we set $B_1 = B \setminus (G_E \cap G_{E^s})$, $B_2 = B \cap G_E \cap G_{E^s}$. Notice that using (3.24) and recalling that, by Theorem 3.21, $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus (G_E \cap G_{E^s})) = 0$, we have that

$$\begin{aligned} |D_y \chi_{E^s}|(B_1 \times \mathbb{R}) &= \int_{\partial^* E^s} \chi_{B_1 \times \mathbb{R}}(x) |\nu_y^{E^s}(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{B_1}(x') \mathcal{H}^0(\partial^*(E^s)_{x'}) dx' = 0. \end{aligned}$$

Therefore, from this equality and from (4.6) we have that

$$(4.8) \quad P(E^s; B_1 \times \mathbb{R}) \leq P(E; B_1 \times \mathbb{R}).$$

By Theorem 3.21, $\nu_y^{E^s} \neq 0$ on $\partial^* E^s \cap (B_2 \times \mathbb{R})$, $(\partial^* E^s)_{x'} = \partial^* E_{x'}^s$ (where $E_{x'}^s$ stands for $(E^s)_{x'}$), $(\partial^* E)_{x'} = \partial^* E_{x'}$ and $\mathcal{L}^1(E_{x'}) < \infty$, hence $H^0(\partial^* E_{x'}) \geq 2$. Thus, using the coarea formula (2.20), (4.5), inequality $H^0(\partial^* E_{x'}) \geq 2$ and Minkowski inequality, (4.4) and the coarea formula (2.20) again, we obtain

$$\begin{aligned} (4.9) P(E^s; B_2 \times \mathbb{R}) &= \int_{\partial^* E^s \cap (B_2 \times \mathbb{R})} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial^* E^s \cap (B_2 \times \mathbb{R})} \frac{1}{|\nu_y^{E^s}|} |\nu_y^{E^s}| d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{B_2} dx' \int_{\partial^* E_{x'}^s} \frac{d\mathcal{H}^0(y)}{|\nu_y^{E^s}(x', y)|} = \int_{B_2} dx' \int_{\partial^* E_{x'}^s} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^{E^s}(x', y)}{|\nu_y^{E^s}(x', y)|} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y) \\ &= \int_{B_2} 2 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^{E^s}(x', \ell(x')/2)}{|\nu_y^{E^s}(x', \ell(x')/2)|} \right)^2} dx' = \int_{B_2} \sqrt{4 + \left| \frac{dD\ell}{d\mathcal{L}^{n-1}} \right|^2} dx' \\ &\leq \int_{B_2} \sqrt{\left(\int_{\partial^* E_{x'}^s} d\mathcal{H}^0(y) \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{\partial^* E_{x'}^s} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y) \right)^2} dx' \\ &\leq \int_{B_2} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y) = \int_{B_2} dx' \int_{\partial^* E_{x'}} \frac{d\mathcal{H}^0(y)}{|\nu_y^E(x', y)|} \\ &= \int_{\partial^* E \cap (B_2 \times \mathbb{R})} d\mathcal{H}^{n-1} = P(E; B_2 \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

The assertion then immediately follows from (4.8) and (4.9). $\square$

As a consequence of Theorem 4.6 we obtain the following result for open convex sets. Notice that, since a bounded open convex set has Lipschitz boundary, by Example 3.12 (ii) it is also a set with finite perimeter.

Proposition 4.7 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ an open convex set with finite measure such that $P(E) = P(E^s) < \infty$. Then E is equal to E^s (up to a translation in the y direction).*

Proof. Since E is open and convex, also the projection $\pi(E)$ of E over $\mathbb{R}^{n-1}$ is a convex open set. Moreover, for any $x' \in \pi(E)$, $E_{x'}$ is equal to an interval, say $(y_1(x'), y_2(x'))$, where $(x', y_i(x')) \in \partial E$, $i = 1, 2$. Moreover, it is easily checked that y_1 is a convex function in $\pi(E)$ and y_2 is concave, hence y_1 and y_2 are locally Lipschitz functions in $\pi(E)$. Let us fix a connected open set $U \subset\subset \pi(E)$. From Theorem 4.6 we have that

$$P(E^s; U \times \mathbb{R}) \leq P(E; U \times \mathbb{R}), \quad P(E^s; (\mathbb{R}^{n-1} \setminus U) \times \mathbb{R}) \leq P(E; (\mathbb{R}^{n-1} \setminus U) \times \mathbb{R})$$

and since by assumption $P(E^s) = P(E)$, we have also $P(E^s; U \times \mathbb{R}) = P(E; U \times \mathbb{R})$. Since y_1, y_2 and $\ell = (y_2 - y_1)/2$ are Lipschitz functions in U , we can write the equality $P(E^s; U \times \mathbb{R}) = P(E; U \times \mathbb{R})$ (see Examples 3.12 (i)) as

$$2 \int_U \sqrt{1 + \left| \frac{\nabla y_2 - \nabla y_1}{2} \right|^2} dx' = \int_U \sqrt{1 + |\nabla y_2|^2} dx' + \int_U \sqrt{1 + |\nabla y_1|^2} dx'.$$

By the strict convexity of the function $\xi \rightarrow \sqrt{1 + |\xi|^2}$, the inequality above implies that $\nabla y_2(x') = -\nabla y_1(x')$ for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. x' in U . Therefore, by the arbitrariness of U we may conclude that there exists a constant c such that $y_2 = -y_1 + c$. Hence the assertion follows. $\square$

Looking back at the proof of Theorem 4.6, in the case when equality occurs in (4.2), we obtain some nontrivial information.

Proposition 4.8 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter, with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, and $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ any Borel set. If*

$$(4.10) \quad P(E^s; B \times \mathbb{R}) = P(E; B \times \mathbb{R}),$$

then, for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in B$, $E_{x'}$ is equivalent to an interval, say $(y_1(x'), y_2(x'))$; moreover,

$$\begin{aligned} \nu_i^E(x', y_1(x')) &= \nu_i^E(x', y_2(x')) && \text{when } i = 1, \dots, n-1, \\ \nu_y^E(x', y_1(x')) &= -\nu_y^E(x', y_2(x')). \end{aligned}$$

Proof. Let us define B_1 and B_2 as in the proof of Theorem 4.6. From the assumption (4.10) and from the fact that inequality (4.7) holds in particular for B_1 and B_2 we get that $P(E^s; B_2 \times \mathbb{R}) = P(E; B_2 \times \mathbb{R})$. Therefore, both inequalities in (4.9) are indeed equalities. The fact that the first inequality is an equality yields that $\mathcal{H}^0(\partial^* E_{x'}) = 2$ for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in B_2$, i.e. that $E_{x'}$ is equivalent to an interval $(y_1(x'), y_2(x'))$. Then, since also the second inequality is an equality, we have

that for all $i = 1, \dots, n-1$, $\frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|}$, is constant on $\partial^* E_{x'}$, and since $|\nu^E| \equiv 1$ on $\partial^* E_{x'}$, we conclude that $\nu_i^E(x', y_1(x')) = \nu_i^E(x', y_2(x'))$ and $|\nu_y^E(x', y_1(x'))| = |\nu_y^E(x', y_2(x'))|$. Then, the equality $\nu_y^E(x', y_1(x')) = -\nu_y^E(x', y_2(x'))$ follows at once from (3.18). $\square$

Remark 4.9 If E is a set of finite perimeter with finite measure such that $P(E^s) = P(E)$ and E is convex, then by Proposition 4.7 E is equivalent to E^s (up to a translation in the y direction). Notice that this is not true anymore if the convexity assumption is dropped, as shown by the examples represented in the figure below. However, Theorem 4.10, proved in [14], states that these examples are essentially the only cases in which things may go wrong.

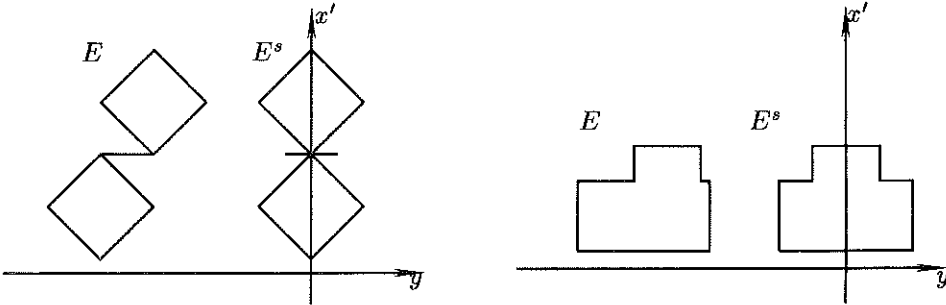
Theorem 4.10 *Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a set of finite perimeter, with $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, such that $\pi(E)^+$ is equivalent to a connected open set $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Assume also that $P(E) = P(E^s)$ and that*

$$(i) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B_r^{n-1}(x'_0)} \ell(x') dx' > 0 \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-2}\text{-a.e. } x'_0 \in U,$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \partial^* E : \nu_y^E(x) = 0\} \cap (U \times \mathbb{R})) = 0.$$

Then, E is equivalent to E^s (up to a translation in the y direction).

We shall not use this result in the sequel, but we limit ourselves to remark that the set shown in the left picture does not satisfy the assumption (i) of theorem above, while the set on the right does not satisfy assumption (ii).



4.2 Proof of the isoperimetric theorem

We are almost ready for the isoperimetric theorem. But before that, let us recall the notion of density of a point x with respect to a set. To this aim, let E be a measurable set in $\mathbb{R}^n$ and $t \in [0, 1]$. We say that a point $x \in \mathbb{R}^n$ has *density t with respect to E* if

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} = t.$$

We set $E^{(t)} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ has density } t \text{ with respect to } E\}$. Notice that $E^{(t)}$ is a Borel set and that $x_0 \in E^{(1)}$ if and only if $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)} (1 - \chi_E(x)) dx = 0$.

Therefore, $E^{(1)}$ is a Borel set such that $\mathcal{L}^n(E \Delta E^{(1)}) = 0$ and

$$x \text{ has density 1 with respect to } E \text{ if and only if } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(E \cap Q_r(x))}{2^n r^n} = 1,$$

where $Q_r(x)$ is the cube with center x and side length equal to $2r$.

Theorem 4.11 (The isoperimetric theorem) *Let E be a measurable set in $\mathbb{R}^n$ with finite measure. Then,*

$$(4.12) \quad \left[\mathcal{L}^n(E) \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n \omega_n^{1/n}} P(E),$$

where ω_n is the measure of the unit ball. Moreover, if the equality holds in (4.12), then E is equivalent to a ball.

Proof. STEP 1 Let us fix a ball B_R such that $\mathcal{L}^n(B_R) > 1$. We claim that there exists a minimizing set $E \subset B_R$ for the problem

$$(4.13) \quad \inf \{P(E) : E \subset B_R, \mathcal{L}^n(E) = 1\}.$$

In fact, denoting by m the infimum in (4.13), there exists a sequence E_h of measurable sets contained in B_R , such that $\mathcal{L}^n(E_h) = 1$ for any h and $P(E_h) \rightarrow m$. Then, by the compactness Theorem 3.10, we may assume that χ_{E_h} converge strongly in $L^1(B_R)$ to some function $u \in BV(B_R)$. Moreover, $u = \chi_E$ for some measurable set $E \subset B_R$, $\mathcal{L}^n(E) = 1$ and $m \leq P(E) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} P(E_h) = m$. This proves the existence of a minimizer of (4.13).

STEP 2 Let us prove that if E is a minimizer in (4.13), then E is equivalent to a ball. To this aim let us fix a direction ν and consider the Steiner symmetral of E in the direction ν , E_ν^s , defined by (2.5). Since E_ν^s is contained in B_R and $\mathcal{L}^n(E_\nu^s) = 1$, from Theorem 4.6 and the minimality of E we get that $P(E_\nu^s) = P(E)$. Therefore, Proposition 4.8 yields that for $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $z \in \pi_\nu$, where π_ν is the plane orthogonal to ν , the section $E_{z,\nu}$ is equivalent to a segment. Denoting by F the set $E^{(1)}$ of the points of density 1 with respect to E , from Lemma 4.12 below we get that, for all $z \in \pi_\nu$, $F_{z,\nu}$ is an interval. Since this property holds for any direction ν we may conclude that F is a convex set. Therefore E is equivalent to a convex

set and thus, without loss of generality, we may assume that E is a convex open set. Using again the fact that $P(E_\nu^s) = P(E)$ for any direction ν from Proposition 4.7 we get that E is symmetric with respect to any direction ν , hence E is a ball. Notice that in particular we have proved that

$$\min\{P(E) : E \subset B_R, \mathcal{L}^n(E) = 1\} = n\omega_n^{1/n}.$$

STEP 3 Let us now take any measurable set E with $\mathcal{L}^n(E) = 1$; if E is bounded then E is contained in some convenient ball B_R and from Step 2 we get immediately that $P(E) \geq n\omega_n^{1/n}$ and that if equality holds then E is equivalent to a ball. Since inequality (4.12) is invariant by rescaling, this proves the assertion for the case of a bounded set.

To prove (4.12) for an unbounded set E it is enough to observe that the inequality is trivial if $P(E) = \infty$, while if $P(E) < \infty$ it can be deduced from the case of a bounded set via the approximation Theorem 3.17. Finally if E were an unbounded set of finite perimeter verifying the equality in (4.12), by repeating the argument used in Step 2 we would get that E is equivalent to a convex set and, since $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, that E is a ball. This contradiction proves the assertion. $\square$

Let us conclude this section with the following technical lemma used in the proof of Theorem 4.11.

Lemma 4.12 *Let E be a measurable set in $\mathbb{R}^n$ such that, for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $E_{x'}$ is equivalent to a segment. Then, denoting by F the set of points of density 1 with respect to E , $F_{x'}$ is a segment for every $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.*

Proof. Let $x_1 = (x', y_1)$, $x_2 = (x', y_2)$ be two points in $F_{x'}$ with $y_1 < y_2$. Let us fix $\bar{y} \in (y_1, y_2)$. We claim that $\bar{x} = (x', \bar{y}) \in F_{x'}$. Since x_1 and x_2 have density 1 with respect to E , they have density 1 also with respect to F . Therefore, given $\varepsilon > 0$, there exists r_ε such that, if $0 < r < r_\varepsilon$, then (see (4.11))

$$\frac{\mathcal{L}^n(F \cap Q_r(x_i))}{2^n r^n} > 1 - \varepsilon \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Therefore by Fubini's theorem we have that

$$\begin{aligned} 2^n r^n (1 - \varepsilon) &< \mathcal{L}^n(F \cap Q_r(x_i)) \\ &= \int_{\pi(F \cap Q_r(x_i))^+} \mathcal{L}^1((F \cap Q_r(x_i))_{z'}) dz' \leq 2r \mathcal{L}^{n-1}(\pi(F \cap Q_r(x_i))^+), \end{aligned}$$

and thus

$$(4.14) \quad \mathcal{L}^{n-1}(\pi(F \cap Q_r(x_i))^+) > 2^{n-1} r^{n-1} (1 - \varepsilon) \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Since the essential projections of $F \cap Q_r(x_1)$ and $F \cap Q_r(x_2)$ are both contained in the same $(n-1)$ -cube of side length r , from (4.14) we easily get that

$$(4.15) \quad \mathcal{L}^{n-1}\left(\pi(F \cap Q_r(x_1))^+ \cap \pi(F \cap Q_r(x_2))^+\right) > 2^{n-1} r^{n-1} (1 - 2\varepsilon).$$

Now, recall that for $\mathcal{L}^{n-1}$ -a.e. $z' \in \pi(F \cap Q_r(x_1))^+ \cap \pi(F \cap Q_r(x_2))^+$ the set $F_{z'}$ is equivalent to a segment such that $\mathcal{L}^1(F_{z'} \cap Q_r(x_i)) > 0$ for $i = 1, 2$. Therefore, if $r < \frac{1}{2} \min\{y_1 - \bar{y}, \bar{y} - y_2\}$, we get that

$$\mathcal{L}^1(F_{z'} \cap Q_r(\bar{x})) = 2r.$$

This equality, together with (4.15) implies that

$$\mathcal{L}^n(F \cap Q_r(\bar{x})) > 2^n r^n (1 - 2\varepsilon), \quad \text{for all } r < r_\varepsilon.$$

Therefore, letting first $r \rightarrow 0$ and then $\varepsilon \rightarrow 0$, we immediately get that also $\bar{x}$ has density 1 with respect to F and thus $\bar{x} \in F$. Hence the result follows. $\square$

References

- [1] F.J.ALMGREN: *Optimal isoperimetric inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc., **13** (1985), 123–126.
- [2] F.J.ALMGREN: *Optimal isoperimetric inequalities*, Indiana Univ. Math. J., **35** (1986), 451–547.
- [3] L.AMBROSIO, N.FUSCO & D.PALLARA: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [4] C.BANDLE: *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, London, 2000.
- [5] P.BERARD & D.MEYER: *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **15** (1982), 513–541.
- [6] W.BLASCHKE: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Springer, Berlin, 1930.
- [7] W.BLASCHKE: *Kreis und Kugel*, Chelsea, New York, 1949.
- [8] T.BONNESEN: *Les problèmes des isopérimètres et isépiphanes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [9] Y.D.BURAGO & V.A.ZALGALLER: *Geometric inequalities*, Springer, Berlin, 1988.
- [10] R.CACCIOPPOLI: *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati I*, Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **12** (1952), 3–11.
- [11] R.CACCIOPPOLI: *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati II*, Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **12** (1952), 137–146.

- [12] C.CARATHÉODORY & E.STUDY: *Zwei Beweise des Satzes, dass der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfanges den grössten Inhalt hat*, Math. Ann., **68**, 133–140.
- [13] I.CHAVEL: *On Hurwitz' method in isoperimetric inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc., **71** (1978), 275–279.
- [14] M.CHLEBÍK, A.CIANCHI, N.FUSCO: *Perimeter inequalities for Steiner symmetrization: cases of equalities*, Annals of Mathematics, to appear.
- [15] E.DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio a r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **36** (1954), 191–213.
- [16] E.DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$ -dimensionali in uno spazio a r dimensioni*, Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.
- [17] E.DE GIORGI: *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I, **5** (1958), 33–44.
- [18] F.EDLER: *Vervollständigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise für den Satz, das der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfangs*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1882), 73–80 (French translation in Bull. Sci.Math., **7** (1883), 198–204).
- [19] L.C.EVANS & R.F.GARIEPY: *Lecture notes on measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [20] H.FEDERER: *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.
- [21] S.GALLOT: *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque, **163–164** (1986), 31–91.
- [22] J.HERSCH: *Isoperimetric monotonicity: some properties and conjectures (connections between isoperimetric inequalities)*, SIAM Rev., **30** (1988), 551–577.
- [23] A.HURWITZ: *Sur le problème des isopérimètres*, C.R. Acad. Sci. Paris, **132** (1901), 401–403.
- [24] A.HURWITZ: *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **19** (1902), 392–394.
- [25] H.LEBESGUE: *Leçon sur les séries trigonometriques*, Gauthier–Villars, Paris, 1906.
- [26] H.MINKOWSKI: *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann., **57** (1903), 459–467.
- [27] J.MOSSINO, *Inégalités isopérimétriques et applications en Physique*, Hermann, Paris, 1984.
- [28] R.OSSERMAN: *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., **84** (1978), 1182–1238.
- [29] R.OSSERMAN: *Bonnesen-style isoperimetric inequalities*, Amer. Math. Mon., **86** (1979), 1–29.

- [30] L.E.PAYNE: *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Rev., **9** (1961), 453-488.
- [31] L.E.PAYNE: *Some comments over the past fifty years of isoperimetric inequalities*, in "Inequalities", W.N.Everitt Ed., Marcel Dekker, New York (1991), 143-161.
- [32] G.PÒLYA & G.SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Studies, **27**, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [33] T.RADÒ: *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*, Trans. Amer. Math. Soc., **61** (1947), 530-555.
- [34] E.SCHMIDT: *Über das isoperimetrische Problem in Raum von n Dimensionen*, Math. Z., **44** (1939), 689-788.
- [35] E.SCHMIDT: *Der Brunn-Minkowski Satz und sein Spiegeltheorem sowie die isoperime-trische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie I*, Math. Nachr., **1** (1948), 81-157.
- [36] E.SCHMIDT: *Der Brunn-Minkowski Satz und sein Spiegeltheorem sowie die isoperime-trische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie II*, Math. Nachr., **2** (1948), 171-244.
- [37] J.STEINER: *Gesammelte Werke*, **2**, Reimer, Berlin, 1882.
- [38] G.TALENTI: *The standard isoperimetric theorem*, in "Handbook on convex geometry", P.M.Gruber & J.M.Willis Eds., North Holland, Amsterdam (1993), 73-123.
- [39] L.TONELLI: *Sulla proprietà di minimo della sfera*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **39** (1915), 109-138.

Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia

Nota II. L'ecocemento

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 7 Maggio 2004)

Riassunto - Vengono descritte modalità di fabbricazione, composizione, prodotti d'idratazione, proprietà meccaniche e di comportamento tecnico dell'ECOCEMENTO, insieme con le utilizzazioni più appropriate.

Si tratta di un cemento che viene prodotto a partire da una miscela generatrice contenente considerevoli quantità di rifiuti solidi urbani che recano discrete quantità di cloro. Dopo cottura, a temperatura compresa fra 1000 e 1200°C, i costituenti principali risultano: alinite, belite, cloroaluminato di calcio e fase ferrica.

Si pone in luce che resistenza meccanica e durabilità dei relativi calcestruzzi sono sostanzialmente simili a quelle dei calcestruzzi di cemento Portland e che il contenuto di cloro, che supera quello del Portland, ne consiglia l'impiego prevalentemente per la realizzazione di strutture non armate.

Parole chiave: Ecocemento, ceneri da rifiuti urbani, cementi a ridotto consumo d'energia.

Summary - Production ways, composition, hydration products, mechanical strength, technical behaviour of the ECOCEMENT, together with most suitable utilizations, are described.

It is a cement prepared from a raw mix containing significant amounts of municipal wastes with distinct chlorine content. After heat treatment at temperatures between 1000 and 1200°C, the main constituents include: alinite, belite, calcium chloroaluminate and the ferrite phase.

It is pointed out that mechanical strength and durability of the resultant concretes are pretty similar to those of Portland cement concretes and that, owing to chlorine content exceeding that of Portland cement, Ecocement is to be mostly used for non-reinforced structures.

Key words: Ecocement, incinerated municipal wastes, "low-energy" cements.

Nella Nota precedente (1), si è dato conto della possibilità di abbassare il consumo d'energia oggi richiesto per la produzione di clinkers di Portland (740 Kcal/Kg), mediante sostituzione del silicato tricalcico (alite), il loro principale costituente, con alinite: un silicato di calcio ad alta basicità, contenente cloro.

Questa Nota descrive invece modalità di fabbricazione, composizione, prodotti d'idratazione, proprietà meccaniche e di comportamento tecnico, nonché appropriate applicazioni, dell'Ecocemento, un cemento prodotto utilizzando notevoli quantità di materie prime, ottenute per incenerimento di rifiuti solidi urbani che recano discrete quantità di cloro, proveniente principalmente da materie plastiche come il cloruro di vinile e da sale da cucina, unitamente a silice, allumina, ossido di ferro ed ossido di calcio, indispensabili elementi per la produzione di cemento Portland.

Tali ceneri non possono trovare utilizzazione come materiale di partenza per la produzione di cemento Portland ordinario, in primo luogo per il contenuto di cloro, ma possono venir impiegate per fabbricare un cemento speciale contenente come componenti idraulici che recano cloro: alinite, o cloroalluminato di calcio..

A causa del contenuto di cloro, alcuni ecocementi, non tutti, possono esser considerati forme speciali di cemento ricco di alinite.

L'Ecocemento è stato sviluppato in Giappone al fine di utilizzare i rifiuti urbani solidi, che venivano messi a discarica dopo conveniente riduzione di volume mediante incenerimento e successiva "inertizzazione" attraverso inglobamento in blocchi di cemento.

Il crescente aumento di volume di rifiuti urbani e non industriali, che in Giappone ammontano a circa 50 milioni di tonnellate/anno (2), a seguito del miglioramento del tenore di vita e del trasferimento delle popolazioni nelle città, unitamente alla mancanza di spazi da destinare a discarica, hanno spinto alla ricerca di una soluzione più vantaggiosa. Essa è stata individuata proprio nella produzione di Ecocemento, la cui miscela generatrice può includere fino al 50% di ceneri da rifiuti urbani.

Il primo impianto di Ecocemento nel mondo ha iniziato la produzione a Chiba, in Giappone, nel 2001. La sua capacità produttiva ammonta a 110.000 ton./anno, mentre a Tokyo è in via di costruzione un impianto da 130.000 ton./anno, che dovrebbe iniziare la produzione nel 2006 (2).

La composizione della frazione inorganica delle ceneri prodotte da rifiuti urbani fluttua in dipendenza dell'area nella quale essi vengono raccolti e delle stagioni. Normalmente la composizione delle ceneri risulta compresa nei limiti seguenti (3):

CaO 25-40%; SiO₂ 14-29%; Al₂O₃ 16-30%; Fe₂O₃ 4-7%; MgO 2-12%; Na₂O 2-4%; K₂O 2-3%; SO₃ 1-3%; Cl 5-11%. Sono anche presenti sostanze tossiche: diossine e metalli pesanti (3).

Le diossine risultano decomposte per effetto del trattamento termico della miscela generatrice e non si riformano a causa del rapido raffreddamento. I metalli pesanti in parte si allontanano anch'essi e si raccolgono in forma di cloruri. Tuttavia una certa quantità di metalli pesanti e di cloruro rimane nel cemento.

Per poter impiegare l'Ecocemento per le costruzioni è pertanto indispensabile verificare che non vi sia rilascio di metalli pesanti. È stato constatato che nella maggior parte dei casi il dilavamento di metalli pesanti operato dalle acque piovane si mantiene in limiti accettabili (2), (3).

In contatto con acqua, i cloruri solubili possono anch'essi esser dilavati dalle paste e dai calcestruzzi induriti e passare nell'ambiente. La velocità di dilavamento e la quantità di cloro dilavato crescono con il rapporto $\text{SO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$ e diminuiscono se l'ecoclinker viene simultaneamente macinato con scoria d'alto forno granulata (3).

Con riferimento alla composizione di fase, le ceneri contengono normalmente: silicato bicalcico e considerevoli quantità di ossido di calcio libero che, nel corso dell'immagazzinamento delle ceneri, può parzialmente convertirsi in idrossido od in carbonato. Il cloro può esser presente come cloruro di calcio, di potassio o di sodio, od anche come costituente della belinite, una fase simile alla belite contenente, però, cloro. Periclasio, silice, ed anche alluminio metallico (4) possono essere altre fasi presenti in quantità limitata.

Preparazione dell'ecocemento

La miscela generatrice, costituita da cenere, calcare ed altri costituenti che caratterizzano la composizione dei rifiuti urbani, viene trattata in forno rotante ad una temperatura compresa fra 1000 e 1200°C. Nel corso del processo di cottura può determinarsi la deposizione dei composti di cloro a basso punto di fusione nel forno rotativo, ciò che costituisce un inconveniente da cercare di evitare.

Composizione chimica dell'ecocemento

La composizione tipica risulta compresa nei limiti seguenti:

CaO 55-63%; SiO_2 16-24%; Al_2O_3 3-14%; Fe_2O_3 1-3%; MgO 1-3%; Cl 1-6% (5),(6).

Le principali fasi presenti nei clinkers sono: alinite, belite, cloroalluminato di calcio ($11\text{CaO} \cdot 7\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{CaCl}_2$) e fase ferrica (5). Può esser presente anche calce libera.

I clinkers a contenuto di cloro relativamente basso, trattati a temperatura piuttosto alta (1300°C), possono dar luogo a formazione di alite in luogo di alinite.

Il cloro è, in massima parte, incorporato nell'alinite e nelle fasi cloroalluminato. Nel reticolo cristallino del silicato tricalcico e del silicato bicalcico ne sono presenti solo quantità trascurabili (5).

L'ecocemento si ottiene per macinazione simultanea dell'ecoclinker e limitate quantità di solfato di calcio. Con l'ecoclinker possono anche esser simultaneamente macinati il solfato di sodio od il carbonato di calcio (3).

Prodotti d'idratazione

A seguito del processo d'idratazione si formano una fase C-S-H, portlandite, sale di Friedel ($C_3A \cdot CaCl_2 \cdot 10H_2O$), ettringite, monosolfato e $CaCl_2$ (3).

Nel corso dell'idratazione il cloro presente si lega parzialmente agli idrati neoformati e si accomoda anche nella soluzione dei pori. La frazione di ioni cloro che passa in soluzione è compresa fra il 10 ed il 40% (5) del quantitativo totale e dipende dalla composizione del prodotto di partenza.

Il tempo di presa dell'ecocemento dipende dal quantitativo di cloroalluminato di calcio presente, dalla forma del SO_3 presente e dal rapporto SO_3/Al_2O_3 . È pertanto possibile registrare tanto una presa più rapida rispetto a quella del cemento Portland (5), quanto un ritardo di qualche ora, sia per l'inizio, che per la fine della presa (2).

Per ritardare il processo di presa si può aggiungere un ritardante (0.5-1%); ad esempio un acido alifatico tricarbossilico come l'acido citrico (5).

Comportamento tecnico

L'ecocemento presenta una maggiore finezza ed una maggiore quantità di fasi alluminose. Pertanto il relativo calcestruzzo mostra una lavorabilità leggermente più bassa di quella dei calcestruzzi di cemento Portland e d'alto forno.

In termini di acqua essudata (bleeding), l'ecocemento si comporta quasi come il cemento Portland (2).

Poiché reca una quantità maggiore di SO_3 ed una quantità minore di silicato tricalcico, è verosimile che l'ecocemento dia luogo, nel corso dell'idratazione, ad una quantità maggiore di fasi solfoalluminose rispetto al cemento Portland ed abbia un più lungo periodo d'induzione (7).

In termini di resistenza meccanica, l'ecocemento esibisce una resistenza a compressione leggermente più bassa, a parità di rapporto acqua/cemento, rispetto al cemento Portland. Mediante macinazione simultanea di ecoclinker e scoria d'alto forno, tale resistenza può esser innalzata (3).

Modulo di Young e di elasticità non presentano differenze rispetto al cemento Portland (2).

Tutto ciò converge nell'indicare che l'ecocemento esibisce proprietà meccaniche quasi identiche a quelle del cemento Portland e pertanto può perfettamente esser impiegato come legante alternativo.

Mediante impiego di additivi aeranti, il calcestruzzo di ecocemento presenta adeguata resistenza a cicli di gelo-disgelo, anche se il processo di scagliatura si rivela leggermente più alto di quello dei calcestruzzi di cemento Portland e di alto forno (2).

La tendenza alla carbonatazione risulta maggiore di quella del cemento Portland e minore di quella del cemento d'alto forno (2).

Applicazioni

Il contenuto di cloruro dell'ecocemento è ben superiore a quello del cemento Portland ordinario. Poiché è ben noto che gli ioni cloro liberi provocano corrosione dei ferri di armatura del calcestruzzo, è buona norma che l'ecocemento non venga impiegato per applicazioni che richiedono calcestruzzo normale o precompresso armato, o calcestruzzo rinforzato con fibre metalliche.

Serve invece ottimamente per la stabilizzazione dei terreni e per interventi con tecniche ad iniezione(3).

Recentemente è stato pubblicato un lavoro sperimentale rivolto ad esaminare il dilavamento del Cl^- dell'ecocemento e la sua attitudine alla successiva combinazione (8). È stato posto in luce che quando nelle malte preparate con ecocemento, con cemento Portland, oppure con cemento d'alto forno, il contenuto di Cl^- viene abbassato ad un valore di 0,1 % in peso (aggiunto come NaCl), tutto il Cl^- presente nell'acqua non combinata viene fissato come sale di Friedel. Il valore del rapporto molare $[\text{Cl}^-/\text{OH}^-]$ dell'acqua in ciascuna malta risulta allora minore di 0.6 alla scadenza di 28 giorni, inferiore alla soglia di corrosione dell'acciaio.

Conclusioni

Sebbene si registrino modeste differenze, si può ragionevolmente concludere che la resistenza meccanica e la durabilità del calcestruzzo di ecocemento risultino sostanzialmente simili a quelle del calcestruzzo di cemento Portland, regolando opportunamente, per opere che richiedano calcestruzzo armato, il suo contenuto di cloruro che, superando quello del cemento Portland, potrebbe dar luogo a corrosione dei ferri d'armatura.

Ci si può in ogni modo attendere che il proseguimento delle ricerche condurrà ad una riduzione sempre più sentita del contenuto di cloruro dell'ecocemento e, conseguentemente, alla sua idoneità anche per la realizzazione di calcestruzzi strutturali (8). Un suo impiego più massivo potrà contribuire, in maniera determinante, anche al miglioramento dell'ambiente.

Bibliografia

- (1) Sersale R. Produzione di clinkers a ridotto consumo d'energia. Nota I. Il cemento ricco di alinite. *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli*, IV, 71, (2004).
- (2) Tanaka S., Nakamura T., Meiarashi S., Kawano H. Proprietà del calcestruzzo con ecocemento e sue applicazioni in Giappone. *Enco Journal*, VIII, 24, 31-35 (2003).
- (3) Odler I. *Special inorganic cements*. E&FN Spon, London, 104-106 (2000).
- (4) Uchikawa H., Haneara S. Recycling of waste as an alternative raw material and fuel in cement manufacturing. In: *Waste materials used in concrete manufacturing*. Ed. Chandra. Noyed Publ. Westwood N.J., 430-533 (1997).
- (5) Takuma Y., Tsuchida Y., Uchida S. Characteristics and hydration of cement produced from ash from incinerated urban garbage. *Proc. 10th ICC*, paper 3ii 118, Goteborg (1997).
- (6) Uchikawa H., Obana H. Ecocement-Frontier of recycling of urban composite wastes. *World Cement*, 26, 11, 33-40 (1995).
- (7) Yokoyama S., Hirao H., Tsuchida Y., Nagano K. Influence of gypsum and fineness on properties of cement using incinerated ash as raw materials. *Cement Sc., Concr. Techn*, 53, 172-177 (1999).
- (8) Hirao H., Yokoyama S. Behavior of chloride ions in hardened ecocement: a new type Portland cement made from municipal waste incinerator ash. *Proc. 11th ICC*, 3, 1271-1280, Durban (2003).

Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo

Il calcestruzzo autocompattante

Nota del Socio ordinario Riccardo Sersale

(Adunanza del di 4 Giugno 2004)

Riassunto - Dopo aver sottolineato che il calcestruzzo del giorno d'oggi non è solo una miscela di cemento, aggregati grossi e fini, acqua, ma contiene anche parecchi prodotti chimici e minerali, si specificano caratteristiche e vantaggi della produzione di un calcestruzzo autocompattante.

Ampio spazio viene riservato ai progressi recentemente compiuti nel settore degli additivi superfluidificanti e di quelli modificatori di viscosità, la cui appropriata combinazione ha consentito di indurre nelle miscele fresche fluidità e resistenza alla segregazione. Si fa anche un accenno ai meccanismi della loro azione.

Si illustra successivamente la funzione determinante delle aggiunte "pozzolaniche" e "non-pozzolaniche" (fillers) nella formulazione delle miscele e si sottolineano i parametri che più influenzano le proprietà reologiche dei sistemi cementizi, indicandone le modalità di valutazione.

Si esaminano infine comportamento e durabilità del calcestruzzo autocompattante e si delineano le auspicabili evoluzioni dell'attuale tecnologia di produzione.

Parole chiave: Calcestruzzo autocompattante, Superfluidificanti, Agenti modificatori di viscosità, Aggiunte minerali, Fillers.

Summary - After the statement that today's concrete is no more a mixture of cement, fine and coarse aggregates and water, but includes quite a lot of chemical and mineral additions, features and benefits of the production of self-compacting concrete are mentioned.

A wide space is reserved to the advancements lately accomplished in the field of superplasticizers and viscosity modifying admixtures, whose suitable association induces in the fresh mixtures fluidity and segregation resistance. Their action mechanism is also considered.

Subsequently, the conclusive effects of "pozzolanic" and "non-pozzolanic" additions (fillers) in the mix-design are illustrated, together with the factors influencing the rheological properties of the fresh mixtures. A short notice concerning rheological properties evaluation is also given.

Mechanical behaviour and durability of self-compacting concrete is after all examined, tracing the outline of the desirable evolution of today's production technology.

Key words. Self compacting concrete, Superplasticizers, Viscosity modifying admixtures, Mineral powder materials, Fillers.

Il calcestruzzo non è più soltanto una miscela di cemento, aggregati grossi e fini ed acqua, ma reca anche parecchie aggiunte chimiche e minerali, impiegate per migliorarne le proprietà allo stato fresco ed indurito. Fra tali aggiunte, una posizione di eccellenza spetta ai superfluidificanti, il cui sviluppo ha consentito di fare i maggiori passi avanti nella tecnologia di preparazione e messa in opera del calcestruzzo. Tali superfluidificanti, oltre a ridurre l'acqua d'impasto e consentire sostanziali incrementi di resistenza meccanica e di durabilità, aiutano ad aumentare la lavorabilità ed a ridurre il contenuto di cemento del conglomerato.

Il calcestruzzo autocompattante, sviluppato negli anni '90, è un calcestruzzo caratterizzato da: eccellente deformabilità, alta resistenza alla segregazione – ottenuta con una notevole quantità di particelle fini e con l'impiego appunto di superfluidificanti –, resistenza all'essudazione (bleeding), nonché da alta fluidità e buona coesività. Esso non necessita di alcuna azione vibrante, poiché riesce a compattarsi sotto l'azione del proprio peso, assicurando il completo riempimento delle casseforme, anche quando esso è reso difficile dalla presenza di spazi ristretti fra i ferri d'armatura.

Ciò ha consentito di modificare sostanzialmente le modalità di messa in opera. In sintesi, il calcestruzzo fresco ha subito un'evoluzione che da prodotto granulare lo ha trasformato in un fluido, a seguito, fra l'altro, di una salutare, appropriata associazione fra superfluidificanti ed agenti modificatori di viscosità.

Inoltre, con l'aggiunzione di una quantità relativamente alta di prodotti polverizzati: cemento Portland, aggiunte minerali, fillers macinati, sabbia molto fine, è possibile realizzare ottime proprietà reologiche, resistenza alla segregazione, resistenza meccanica ed alla fessurazione, favorita quest'ultima dalle tensioni termiche indotte dallo sviluppo del calore d'idratazione.

Il calcestruzzo autocompattante è stato messo a punto per la prima volta in Giappone negli anni ottanta, per combattere la carenza di mano d'opera qualificata e ridurre il tempo di realizzazione delle opere (1). Ha raggiunto oggi un buon utilizzo per diversificate applicazioni in molti Paesi.

I superfluidificanti di prima generazione, basati su polimeri solubili in acqua e contenenti gruppi solfonici, che inducono buona lavorabilità e coesività, furono già usati in Germania occidentale negli anni 75-76 ed originarono i calcestruzzi autolivellanti. In quell'epoca non erano, disponibili agenti modificatori di viscosità.

Negli ultimi anni, la tecnologia di produzione di superfluidificanti è molto progredita ed oggi sono disponibili prodotti molto più efficienti di quelli di prima generazione, basati su polimeri acrilici, idonei ad indurre, allorché combinati con additivi che incrementano la viscosità (2), alta fluidità e resistenza alla segregazione.

Notevoli si rivelano i vantaggi dell'impiego di calcestruzzo autocompattante. Esso:

- svincola il calcestruzzo dai sistemi di compattazione, di posa in opera e non richiede mano d'opera qualificata;
- riduce i tempi d'esecuzione delle opere di circa il 20-25% (3);
- elimina i rumori delle tecniche di vibrazione e le conseguenze che ne possono derivare;
- elimina le bolle d'aria prodotte dalle tecniche di vibrazione, migliorando la faccia vista delle strutture. Per l'alta fluidità del conglomerato e per l'alta velocità con cui può essere gettato, le bolle d'aria rimangono intrappolate a cuore dell'impasto e non vengono sospinte contro le pareti delle casseforme;
- comporta una decisa riduzione della mano d'opera;
- allunga la durata delle casseforme, a seguito della ridotta abrasività del prodotto che le riempie.

Formulazione della miscela per calcestruzzo autocompattante

Le principali differenze che intercorrono fra la composizione dei calcestruzzi autocompattanti e quelli tradizionali, oltre agli additivi superfluidificanti e modificatori di viscosità, risiedono sostanzialmente nel maggior volume di materiale con una finezza inferiore a 150 micron (3); cemento, aggiunte minerali, frazioni finissime degli aggregati lapidei grossi, ed un minor contenuto di aggregati grossi con pezzatura inferiore a 20 mm., riducono le collisioni dell'elemento lapideo nelle zone di ridotta sezione o di spazi in cui si registra affollamento di ferri d'armatura. Di norma, il volume di sabbia risulta invariato rispetto a quello di un calcestruzzo tradizionale.

Nella formulazione del calcestruzzo autocompattante, al fine di ridurre il contenuto di cemento della miscela, è pratica usuale addizionare aggiunte minerali. Si impiegano: ceneri volanti, scoria d'alto forno granulata, calcite polverizzata, fumo di silice, (determinante nello sviluppo ed utilizzazione di calcestruzzi ad alte prestazioni, che, con particelle da 0,1-1 micron in combinazione con superfluidificanti, fornisce miscele fresche a grande coesione (4) e grande stabilità), silice colloidale amorfa, ultrafine (5) (nanosilica), con particelle di forma sferica da 5-50nm, con area superficiale fra 80-1000 m²/g, che, aggiunta in ragione del 3-5%, riduce l'essudazione (bleeding) ed aumenta resistenza alla segregazione e stabilità.

L'incremento di resistenza che il calcestruzzo di oggi ha raggiunto, è solo conseguibile con impiego di additivi chimici in combinazione con aggiunte attive: microsilice, metacaolino, ceneri volanti, ceneri di pula di riso, scoria d'alto forno granulata.

Nel mondo la produzione annuale corrente di ceneri volanti risulta dell'ordine di 450 milioni di tonnellate (1), mentre quella di scoria d'alto forno è

dell'ordine di 100 milioni di tonnellate. Soltanto circa 25 milioni di tonnellate, il 6% del volume totale di ceneri volanti disponibili, è oggi impiegato come ag giunta attiva nei cementi di miscela o nelle mescole per calcestruzzo (1).

È stato rilevato (1) che calcestruzzi strutturali con superfluidificanti, preparati con rapporto acqua/cemento di 0.30, mostrano che le ceneri volanti di classe F o di classe C (ASTM C 618) possono rimpiazzare circa il 60% del cemento. Prove sperimentali sui corrispondenti provini, preparati con miscele contenenti 59 Kg/m³ di cemento tipo I (ASTM), 200 Kg/m³ di ceneri volanti di classe F, 102 Kg/m³ d'acqua, 1220 Kg/m³ di aggregato grosso, 810 Kg/m³ di aggregato fine e 7 litri/m³ di superfluidificante, hanno denunciato una resistenza a compressione di 8 MPa ad 1 giorno, 55 MPa a 28 giorni ed 80 MPa a 182 giorni.

Recenti lavori condotti da Lang e Geiseler (1) con un cemento d'alto forno tedesco, contenente 77,8% di scoria con finezza 406 m²/Kg, hanno posto in luce caratteristiche meccaniche e durabilità eccellenti. I provini per calcestruzzo, preparati con miscela contenente 455 Kg/m³ di cemento, rapporto acqua/cemento 0.28, hanno denunciato resistenza a compressione di 13 MPa ad 1 giorno, 37 MPa a 2 giorni, 58 MPa a 7 giorni, 91 MPa a 28 giorni (1).

I provini preparati con miscele ad alto contenuto di ceneri volanti, o ad alto contenuto di scoria d'alto forno, hanno mostrato resistenza alla permeabilità all'acqua ed alla penetrazione dei cloruri, eccezionalmente alta. Il calcestruzzo ha altresì mostrato buona resistenza alla carbonatazione, alla penetrazione di liquidi organici e, in climi freddi, ai cicli di gelo-disgelo ed ai sali disgelanti.

Le proprietà di permeazione che includono: permeabilità, adsorbimento, diffusività, ecc., sono state largamente impiegate per quantificare le caratteristiche di durabilità del calcestruzzo (6).

I relativi risultati indicano che le miscele per calcestruzzo autocompattante hanno una permeabilità all'ossigeno ed un adsorbimento notevolmente inferiori rispetto a quello normalmente vibrato, della medesima classe di resistenza. Il tipo di filler usato sembra significativamente influenzare l'attitudine alla diffusione del cloruro. Le miscele non contenenti filler polverizzato, bensì un agente modificatore di viscosità, al fine di assicurare stabilità alla miscela fresca, mostrano una diffusività del cloruro considerevolmente più alta.

A causa dell'alta percentuale di particelle fini, la struttura dei pori del calcestruzzo autocompattante differisce da quella del calcestruzzo tradizionale.

La struttura dei pori è uno dei fattori che maggiormente influenzano la durabilità e, più particolarmente, il comportamento verso l'acqua. La durabilità è fortemente influenzata dalla permeabilità all'acqua, dall'adsorbimento d'acqua e dalla suzione capillare. Il calcestruzzo autocompattante assorbe meno acqua di quello tradizionale (7).

Le ceneri volanti di classe F, ultrafini e superclassificate, con dimensione media delle particelle di 6 micron, si sono dimostrate idonee alla preparazione

di calcestruzzi autocompattanti a basso tenore di cemento, estremamente coesivi, a rapporto acqua/cemento fra 0.2 e 0.45, senza bisogno di additivi particolari, ciò che rende la produzione ben più economica di quella degli altri calcestruzzi autocompattanti. Il rimpiazzo ottimale di cemento è risultato pari al 30% (8).

Sono stati in tal modo ottenuti calcestruzzi con assenza di segregazione ed essudazione, coesività e caratteristiche di scorrimento estremamente alte, assai più durabili di altri calcestruzzi preparati con materiali alternativi di rimpiazzo, come si è rilevato dalla migliore resistenza alla penetrazione di ioni aggressivi.

La funzione della cenere volante ultrapolverizzata (finezza Blaine 550, 800, 1100 m²/Kg; diametro medio 13,8, 5,5, 2,5 micron) è quella di migliorare la viscosità della miscela fresca ed il suo effetto è simile a quello di un agente modificatore di viscosità (9).

La cenere volante non abbassa inoltre la fluidità dell'impasto fresco, aumenta la lavorabilità grazie all' "effetto palla" delle particelle sferiche (10), induce elevate proprietà meccaniche ed alta durabilità. La resistenza a compressione raggiunge 80 MPa (9) ed il calcestruzzo presenta bassa permeabilità, buona resistenza al gelo-disgelo e basso ritiro per essiccazione.

Polveri ultrafini, quali: ceneri volanti (diametro medio 5.8 micron), scoria d'alto forno grapulata (diametro medio 6.5 micron), fumo di silice (diametro medio 0.2 micron), particolarmente efficiente grazie alla sua altissima attività "pozzolanica" e finezza, migliorano la compattazione delle particelle, così come le proprietà reologiche dei sistemi cementizi allo stato fresco con basso rapporto acqua/cemento, le proprietà meccaniche e la durabilità (11).

Il 10% in peso di miscele complesse (fumo di silice, microsilice naturale, metacaolino) aumenta la resistenza dei cementi LWDB (low-water demand binder) e del calcestruzzo alle brevi e lunghe stagionature (12).

Fillers "non pozzolanici" sono frequentemente impiegati per ottimizzare la compattazione delle particelle, migliorare le proprietà del calcestruzzo (13) ed influenzare la scorrevolezza delle miscele per calcestruzzo autocompattante.

Il calcare polverizzato è il materiale tradizionalmente più usato per controllare la segregazione potenziale e la deformabilità del calcestruzzo autocompattante, fresco. La polvere di calcare più fine e meglio classificata aumenta notevolmente la deformabilità delle paste (14).

Per aggiunta di una notevole quantità di filler calcareo e di un agente modificatore di viscosità, le attese proprietà di autocompattazione crescono a basso rapporto acqua/legante; migliora altresì la resistenza a 28 giorni, grazie all'effetto filler ed alla superiore compattazione delle particelle.

Sono naturalmente stati proposti fillers alternativi. È stato suggerito di utilizzare il fino di granito, prodotto nel corso della macinazione della roccia, le cui particelle risultano più fini della polvere di calcare (15). Per effetto della morfologia e distribuzione delle particelle, le mescole richiedono, però, un più

alto dosaggio di superfluidificante per ottenere proprietà di scorrimento analoghe a quelle raggiungibili con filler calcareo.

È stato anche proposto di utilizzare come filler la polvere fine di aggregati riciclati, ricavabile per macinazione di calcestruzzi già impiegati (16), la quale riduce la segregazione ed aumenta la resistenza a compressione.

Reologia e parametri che influenzano la reologia dei sistemi cementizi

La reologia costituisce la scienza della deformazione e del flusso di materia e consente di caratterizzare i sistemi cementizi e comprendere come si comportano nelle pratiche applicazioni. Senza soddisfacenti proprietà allo stato fresco, è ben difficile che il materiale indurito esibisca le attese proprietà.

La reologia dei sistemi cementizi è dominata dalla struttura della pasta di cemento, ma nella malta e nel calcestruzzo tale struttura viene parzialmente o del tutto modificata a seguito del mescolamento. Pertanto il calcestruzzo si adatta bene al modello di Bingham ed il suo comportamento, durante il pompaggio o la vibrazione e nella cassaforma, può esser interpretato con riferimento a tale modello (17).

Grande impegno di ricerca è stato rivolto alle ricadute dei costituenti della miscela, delle loro proporzioni, delle proprietà del cemento, degli additivi, delle aggiunte attive minerali, sulla reologia del calcestruzzo.

A seguito dell'elevata fluidità dell'impasto, le proprietà reologiche dei calcestruzzi autocompattanti non possono esser valutate con il metodo tradizionale: lo *slump* (l'abbassamento del cono di Abrams) e richiedono metodi diversi. Fra questi: un dispositivo che ha riscosso ampio successo nella pratica, costituito da una girante elicoidale che ruota in una vaschetta cilindrica contenente il calcestruzzo fresco. Il comportamento è analizzato al lume della teoria della mescolanza (18).

In Italia viene impiegata un'apparecchiatura costituita da due camere, separate da una sequenza di ostacoli e da una saracinesca. Appena sollevata, si determina l'altezza di riempimento del calcestruzzo che fluisce dalla prima camera ed il tempo intercorso dal sollevamento della saracinesca fino all'arresto del flusso. Maggiori le altezze di riempimento e minori i tempi richiesti, migliori mobilità e deformabilità del conglomerato in spazi ristretti (3).

Fra i parametri che influenzano la reologia dei sistemi cementizi, vanno ricordati:

- finezza e contenuto di silicato tricalcico del cemento adoperato (3). Cementi con finezza elevata, ricchi di silicato tricalcico, innalzano il limite di scorrimento ed incrementano la viscosità plastica;
- pozzolane o ceneri volanti migliorano la stabilità dei sistemi cementizi, senza influenzare le proprietà di flusso;

- il rapporto acqua/cemento esercita la medesima influenza che finezza e contenuto di silicato tricalcico esplicano sulle proprietà del calcestruzzo fresco;
- gli additivi chimici, indispensabili per indurre alta scorrevolezza, alta resistenza, alta durabilità, che, a seconda della classe di appartenenza, esplicano influenza differente. Gli additivi superfluidificanti, che riducono il rapporto acqua/cemento, favoriscono la dispersione delle particelle e migliorano la lavorabilità, si rivelano particolarmente idonei a stabilizzare le proprietà reologiche e la consistenza del calcestruzzo autocompattante. I più importanti sono quelli contenenti disperdenti a base di policarbossilati, che esibiscono alta dispersione a bassi dosaggi ed eccellente ritenzione dello *slump* (19). Paragonati con i superfluidificanti tradizionali, a base di ligninsolfonato, naftalensolfonato, melammina solfonato o glucosio, i polimeri a base carbossilica mostrano significativi vantaggi di comportamento: maggiore velocità di riduzione d'acqua, maggiore durata dello *slump*, viscosità del calcestruzzo bassa e stabile, più rapidi tempi di presa (20). Fattore chiave per calcestruzzi autocompattanti è una viscosità molto bassa anche per rapporti acqua/cemento inferiori al 20%.

L'impiego combinato di un appropriato dosaggio di superfluidificanti e di agenti modificatori di viscosità, contribuisce significativamente a fornire paste di cemento ad elevata resistenza, altamente fluide e sufficientemente coesive. Migliora inoltre la ritenzione d'acqua ed impartisce deformabilità, adeguata lavorabilità e resistenza alla segregazione.

Gli agenti modificatori di viscosità più comunemente impiegati, includono polisaccaridi di provenienza microbica ed amidacea, derivati cellulosici (2), glicopolietilenico e biopolimeri (5).

L'impiego di additivi modificatori di viscosità, polimeri solubili in acqua, che aumentano la viscosità dell'acqua d'impasto ed incrementano l'attitudine della pasta di cemento a mantenere in soluzione i costituenti, ha dimostrato di esser particolarmente valido per stabilizzare le proprietà reologiche e la consistenza del calcestruzzo autocompattante. La maggior parte degli agenti modificatori di viscosità reperibili sul mercato sono, però, costosi e conseguentemente incidono sul costo del calcestruzzo. È pertanto essenziale lo sviluppo e la produzione di nuovi agenti modificatori di viscosità a più basso costo.

È stato perciò studiato il comportamento di quattro nuovi agenti a base di polisaccaridi sull'incremento delle proprietà reologiche e di consistenza delle paste di cemento. La ricerca, condotta su paste di cemento, impiegando vari dosaggi di tali nuovi additivi modificatori di viscosità e di superfluidificanti si è rilevata promettente (2). Conferma infatti che paste con soddisfacenti proprietà reologiche presentano qualità paragonabili od anche superiori a quelle ottenute con impiego di additivi del commercio.

Le miscele contenenti additivi modificatori di viscosità accusano comportamento tipicamente tissotropico: per energica agitazione esso si modifica. La viscosità apparente pertanto decresce all'aumentare della velocità di agitazione.

Nell'ultima decade è stata introdotta una nuova classe di superfluidificanti particolarmente efficienti, basata su polimeri acrilici (21). Il meccanismo della loro azione, consistente in una dispersione dei grani di cemento, è correlato all'effetto dell'impedimento sterico, provocato dalla presenza di lunghe catene ramificate e differisce notevolmente dal meccanismo d'azione dei superfluidificanti contenenti solfo-gruppi.

I copolimeri acrilici comprendono vari composti che differiscono nella struttura e nella sequenza di particolari unità. Pertanto la relativa incidenza sul grado di fluidificazione può risultare differente.

Attraverso un'appropriata selezione e dosaggio di comonomeri che parteciperanno al processo di polimerizzazione, è pertanto possibile realizzare una sintesi controllata di superfluidificanti acrilici di particolari proprietà.

Comportamento meccanico

È stato condotto uno studio sperimentale sulle proprietà meccaniche del calcestruzzo autocompattante: resistenza, modulo elastico, scorrimento viscoso, ritiro. Termine di paragone: il calcestruzzo normalmente compattato (22).

I risultati hanno mostrato che, a parità di condizioni, il modulo elastico, lo scorrimento viscoso ed il ritiro del calcestruzzo autocompattante non differiscono gran che dalle corrispondenti proprietà di quello normalmente compattato. La resistenza meccanica è funzione della classe di appartenenza.

Nessuna differenza di comportamento è stata rilevata fra calcestruzzo autocompattante stagionato in acqua distillata ed in acqua di mare.

Se la stagionatura viene effettuata in solfato sodico, si è rilevata una più alta perdita di peso del calcestruzzo autocompattante, rispetto a quello vibrato, dovuta probabilmente al contenuto di filler calcareo (23).

Mediante aggiunta al cemento di :filler calcareo, di un agente espansivo, atto ad aumentare il volume del calcestruzzo per effetto di reazioni chimiche controllate, che decorrono in presenza di umidità, di un additivo antiritiro a base di eteri poliglicoli e di un superfluidificante acrilico, è possibile produrre anche un particolare calcestruzzo autocompattante, caratterizzato da un ritiro basso o nullo. Anche in assenza di stagionatura umida, non si registrano fessurazioni indotte dal ritiro igrometrico (24).

Conclusioni

Il passaggio del calcestruzzo fresco, da materiale granulare a fluido che si compatta sotto l'azione del proprio peso, reso possibile dall'impiego combinato di additivi chimici, di aggiunte minerali e da una più appropriata composizione granulometrica, rappresenta un rilevante avanzamento dell'industria delle costruzioni e pone in luce l'eccezionale contributo della chimica allo sviluppo ed all'affermazione di questa nuova tecnologia.

Si ritiene infatti che la messa a punto degli additivi superfluidificanti di nuova generazione rappresenti uno dei maggiori passi avanti della tecnologia del calcestruzzo, avendo contribuito, fra l'altro, alla riduzione del rapporto acqua/cemento, con evidenti ricadute sulla resistenza meccanica e sulla durabilità delle strutture, in tutti gli ambienti di vita.

Molto ci si aspetta ancora dal progresso nel settore degli additivi chimici, non solo con riferimento alla loro funzione, ma altresì sull'abbassamento dei costi che innalzano quello del calcestruzzo.

Il prossimo traguardo: la produzione di un calcestruzzo la cui messa in opera non richieda compattazione, stagionatura e giunti di ritiro (24).

Bibliografia

- (1) Dordi C.M. Concrete for the Millennium. In: *Advances in Cement Technology*. S.N. Ghosh Ed. Tech. Books Int. 2° Ed., 421-454. New Dehli (2002).
- (2) Lachemi M., Hossain K.M.A., Lambros V., Nkinamubanzi P-C., Bouzoubaa N. Performance of new viscosity modifying admixtures in enhancing the rheological properties of cement paste. *Cement Concr. Res.*, 34, 2, 185-193 (2004).
- (3) Coppola L. Il calcestruzzo autocompattante: proprietà ed applicazioni. ENCO Engineering Concrete. Spresiano (TV).
- (4) Appa Rao G. Investigations on the performance of silica fume-incorporated cement pastes and mortars. *Cement Concr. Res.*, 33, 11, 1765-1770 (2003).
- (5) Collepardi M. Self-compacting concrete: What is new? Third Int. Symp. on Self-compacting Concrete. Reykjavic 17-20 August (2003).
- (6) Zhu W., Bartos P. J. M. Permeation properties of self-compacting concrete. *Cement Concr. Res.*, 33, 921-926 (2003).
- (7) Audenaert K., Boel V., De Schutter G. Water permeability of self-compacting concrete. 11th ICCI, 3, 1574-1583. Durban (2003).
- (8) Fossey S.D., Byars E.A., Zhu H.Y. Superclassified PFA for self-compacting concrete. Proc. 11th ICCI, 2, 769-779. Durban (2003).
- (9) Xie Y., Liu B., Yin J., Zhou S. Optimum mix parameters of high-strength self-compacting concrete with ultrapulverized fly ash. *Cement Concr. Res.*, 32, 3, 477-480 (2002).

- (10) Siddique R., Properties of concrete incorporating high volumes of class F fly ash and san fiber. *Cement Concr. Res.*, 34, 1, 37-42 (2004).
- (11) Long G., Wang X., Xie Y. Very high performance concrete with ultrafine powders. *Cement Concr. Res.*, 32, 4, 601-605 (2002).
- (12) Sobolev K., Soboleva S. The effect of complex admixtures on strength of ultra high-strength cement. 11th ICCI, 2, 465-474. Durban (2003).
- (13) Topcu I.B., Ugurlu A. Effect of the use of mineral filler on the properties of concrete. *Cement Concr. Res.*, 33, 7, 1071-1075 (2003).
- (14) Bokan Bosiljkov V. SCC mixes with poorly graded aggregate and high volume of limestone filler. *Cement Concr. Res.*, 33, 9, 1279-1286 (2003).
- (15) Ho D.W.S., Shein A. M. N., Ng C.C., Tam C.T. The use of quarry dust for SCC applications. *Cement Concr. Res.*, 32, 4, 505-511 (2002).
- (16) Corinaldesi V., Orlandi G., Moriconi G. Self-compacting concrete incorporating recycled aggregate. *Proc. Int. Conf. Challenges in Concrete Construction*. 455-464. Dundee (2002).
- (17) Banfill P.F.G. The rheology of fresh cement and concrete. A Review. *Proc. 11th ICCI*, 1, 50-62. Durban (2003).
- (18) Tattersall G. H., Banfill P. F. G. The rheology of fresh concrete. Pitman (1983).
- (19) Sugiyama T., Ohta A., Uomoto T. The dispersing mechanism and applications of polycarboxylate-based superplasticizers. *Proc. 11th ICCI*, 2, 560-568 (2003).
- (20) Danziger M.W. Saitoh K., Jost P., Maeder U. New generation of admixture polymers and its role in concrete technology. *Proc. 11th ICCI* 4, 2271-2275. Durban (2003).
- (21) Grzeszczyk S., Sudol M. The influence of new generation superplasticizers on the rheological properties of cement pastes. *Proc. 11th ICCI*, 2, 727-735 Durban (2003).
- (22) Persson B. A comparison between mechanical properties of self-compacting concrete and the corresponding properties of normal concrete. *Cement Concr. Res.*, 31, 2, 193-198 (2001).
- (23) Persson B. Sulphate resistance of self-compacting concrete. *Cement Concr. Res.*, 33, 12, 1933-1938 (2003).
- (24) Collepardi M., Borsoi S., Collepardi S., Fazio G., Ogoumah Olagot J.J. 3-Self-concrete (3SC). La prossima sfida. II. Calcestruzzo auto-stagionante, autocompresso ed autocompattante. *ENCO Journ.* 7, 24, 22-29 (2003).

Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia

Nota III. Cementi belitici e solfobelitici

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 5 Novembre 2004)

Riassunto - Dopo aver sottolineato l'interesse odierno della produzione di clinkers a ridotto consumo d'energia, si discutono modalità di fabbricazione, composizione e caratteristiche di comportamento tecnico di cementi ad alto contenuto di belite. Si passa quindi all'esame dei metodi di attivazione della belite e delle possibilità di incrementare la cinetica d'idratazione del silicato bicalcico, al fine di accelerare lo sviluppo di resistenza meccanica iniziale dei cementi belitici. Si considera la composizione delle paste indurite ed i possibili campi di applicazione di tali cementi.

Si discutono successivamente composizione, caratteristiche, decorso del processo di clinkerizzazione, composizione delle paste, sviluppo della resistenza meccanica e campi d'impiego dei cementi che accanto alla belite recano il solfoalluminato di calcio, alcuni dei quali possono esser classificati cementi espansivi.

Parole chiave: Cementi belitici e solfobelitici.

Summary - Today's interest of low-energy clinkers is in the first place emphasized. Production ways, composition and technical behaviour of high belite cements are then discussed. Belite activation and methods fit for improving hydration kinetics of dicalcium silicate, in order to accelerate early strength development of high belite cements, are considered, examining also the composition of the hardened pastes and applications.

Composition, characteristics, clinker formation process, pastes composition, strength development and applications of cements containing belite and calcium sulfoaluminate, which may perform either as non-expansive high early strength cements, or as expansive cements, are finally discussed.

Key words: Belite and sulfobelite cements.

In precedenti Note è stato posto in luce che l'industria del cemento Portland consuma gran quantità di energia e comporta un notevole sviluppo di anidride carbonica, la quale contribuisce a quel riscaldamento globale dell'ambiente che va sotto il nome di "effetto serra".

La ricerca pertanto si indirizza alla formulazione di miscele generatrici più povere di calce, che originano clinkers ricchi di silicato bicalcico (belite), senza o con poca alite (silicato tricalcico), o clinkers nei quali l'alite viene sostituita dal solfoalluminato di calcio (cementi solfobelitici).

Cementi belitici

Vengono prodotti da miscele generatrici la cui composizione chimica è regolata da rapporti fra i costituenti, il più importante dei quali è il fattore di saturazione di calce o calce standard.

Esso esprime la quantità massima di calce che può combinarsi con i vari ossidi presenti, in accordo con la formula chimica corrispondente ai minerali di neoformazione del clinker (silicato tricalcico, silicato bicalcico, alluminato tricalcico, alluminoferrito tetracalcico), secondo il diagramma di fase di alta temperatura.

Il fattore di saturazione di calce è espresso dalla formula:

$$\frac{100\% \text{ CaO}}{2,8\% \text{ SiO}_2 + 1,1\% \text{ Al}_2\text{O}_3 + 0,7\% \text{ Fe}_2\text{O}_3}$$

Nella produzione di cemento, una valida via di riduzione sia del consumo di energia, sia delle emissioni di CO_2 , è rappresentata dall'abbassamento del fattore di saturazione di calce della miscela generatrice, con corrispondente aumento del contenuto di belite e diminuzione del contenuto di alite (silicato tricalcico) (1). Con fattore di saturazione di calce pari a 75%, si ottiene infatti un clinker potenzialmente privo di alite che, in luogo di alluminato tricalcico, reca $12\text{CaO} \cdot 7\text{Al}_2\text{O}_3$.

L'abbassamento del fattore di saturazione di calce da 100 a 75%, comporta una riduzione del 12% del calore teorico richiesto. Tale risultato sembra dipendere dalla ridotta emissione di calore nel corso della cristallizzazione della belite, piuttosto che dell'alite. Le emissioni di CO_2 diminuiscono solo del 6% (2).

Un cemento ad alto contenuto di belite ha un calore di formazione teorico più basso di 150 KJ/Kg rispetto ad un cemento di alite classico (1).

La riduzione del contenuto di calcare della miscela generatrice, corrispondente ad un fattore di saturazione di calce di circa 80-85%, riduce di circa 10-14% l'energia richiesta e consente la formazione di un clinker con proprietà soddisfacenti ad una temperatura più bassa di circa 150°C (3). La ridotta temperatura di cottura comporta, fra l'altro, una ridotta formazione di NO_x .

L'abbassamento della temperatura abbassa automaticamente le perdite di calore nel processo di cottura e la diminuzione del fattore di saturazione di calce comporta un miglioramento di macinabilità, grazie ad una riduzione del peso

specifico apparente del clinker. Sfortunatamente tali vantaggi sono però contro-bilanciati da una diminuita resistenza, specie alle brevi stagionature, dei cementi belitici.

Tali cementi con soddisfacenti proprietà sono prodotti in scala industriale da calcare, argilla torrefatta, ceneri vulcaniche, ceneri di pirite e gesso, e la miscela generatrice può esser cotta in un forno rotativo classico.

I cementi belitici a basso consumo di energia rappresentano un'alternativa economica al cemento Portland, poiché manifestano proprietà accettabili per molte applicazioni ed hanno il vantaggio di una migliore durabilità (4).

Con un fattore di saturazione di calce pari ad 84%, lo sviluppo di resistenza meccanica è accettabile anche nei primi stadi del processo d'idratazione.

La produzione di cemento belitico prevede la macinazione del clinker belitico insieme a piccole aggiunte di solfato di calcio (gesso od anidrite). Questi clinkers contengono belite quale unico o principale silicato di calcio. Contengono anche alluminato tricalcico e fase ferrica. Anche l'alite può esser presente in alcuni clinkers belitici, ma solo in quantità modeste.

I clinkers belitici differiscono sia dal clinker di Portland ordinario, sia dai clinkers di Portland ad alto contenuto di belite per il più basso contenuto di Ca-O, conseguenza dell'impiego di un fattore di saturazione di calce non più alto dell'80%. Un abbassamento del fattore di saturazione di calce da 100 ad 80% riduce normalmente il quantitativo di calcare della miscela generatrice di circa 120 Kg per tonnellata di clinker prodotto, riducendo, in pari tempo, l'entalpia chimica della sua formazione di circa 220 KJ/t (5).

Al fine di ottenere resistenze meccaniche accettabili, anche se ridotte, per alcuni impieghi, è necessario regolare il fattore di saturazione di calce, così da ottenere la formazione di una certa quantità di alite a seguito del processo di cottura. Come soluzione alternativa è stato proposto di miscelare un clinker belitico privo di alite, prodotto con un bassissimo fattore di saturazione di calce, con limitate quantità di un clinker di composizione prossima a quella di un Portland ordinario, che serve da fornitore di alite (3).

Oltre che dal rapporto C_3S/C_2S , la resistenza a compressione dei cementi belitici dipende dal rapporto Al_2O_3/Fe_2O_3 nella fase interstiziale, benchè in minor misura (6). Al crescere di tale rapporto la resistenza del cemento tende ad aumentare fino a circa 28 giorni.

I cementi belitici possono esser impiegati per realizzare strutture la cui resistenza a compressione, alle brevi stagionature, non sia il requisito essenziale. Essi rispettano le prescrizioni dei cementi a bassa temperatura d'idratazione.

Cementi belitici attivati

Al fine di produrre cementi belitici con accettabile resistenza, specie alle brevi stagionature, con un fattore di saturazione di calce inferiore all'85%, è pe-

rò richiesta una belite attivata, dotata, cioè, di più alta reattività. A tale scopo sono stati proposti i seguenti trattamenti:

- 1) rapida tempra del clinker, al fine di stabilizzare la forma polimorfa di C_2S che vive ad alta temperatura;
- 2) introduzione di ioni estranei (alcali, solfato, ecc.), atti a stabilizzare la forma polimorfa di C_2S che vive ad alta temperatura;
- 2) addizione di clinker di cemento Portland ordinario al clinker belitico, per accelerare la cinetica d'idratazione del C_2S (3).

È noto che esistono cinque forme cristalline diverse di silicato bicalcico.

Dal liquido solidifica per raffreddamento a $2130^{\circ}C$ una modificazione detta α , che a circa $1425^{\circ}C$ si trasforma reversibilmente nella forma α'_H ; questa a $1160^{\circ}C$ passa alla modificazione α'_L .

A circa $725^{\circ}C$ si dovrebbe originare una forma γ , ma spesso il passaggio $\alpha'_L \rightarrow \gamma$ non ha luogo ed intorno a $680^{\circ}C$ il $2CaO \cdot SiO_2 - \alpha'_L$ rimasto inalterato, si trasforma in una quinta modificazione β .

Essa è presente nel cemento Portland ed è in grado di reagire con l'acqua, sia pure lentamente.

La sua velocità d'idratazione può però esser incrementata con metodi termici oppure chimici (7).

La tempra con la più rapida velocità di raffreddamento di miscele generatrici con fattore di saturazione di calce pari ad 80-90% e differenti contenuti di alcali, fornisce una α -belite ad alto contenuto di alcali (1.49% Na_2O eq), mentre per contenuti più bassi di alcali è stata identificata una nuova forma polimorfa β^* , con accresciute proprietà idrauliche (8).

L'attivazione del cemento belitico consente l'impiego di calcari di qualità inferiore. Normalmente il fattore di saturazione di calce si aggira fra 75-85% e l'attivazione si ottiene temprando fra 1300 e $900^{\circ}C$ con una velocità di raffreddamento di almeno $800^{\circ}C/min$ (9), o con l'impiego di più alti livelli di alcali (10), ottenendo belite presente principalmente nelle forme α ed α' .

Il trattamento di tempra determina la stabilizzazione dell' α' -belite attraverso incorporamento di alcali o di altri ioni estranei in proporzione fino al 5%. L'aggiunta programmata di solfati alcalini non riesce a stabilizzare la forma α' e solo la tempra è in grado di produrre una belite attivata.

Anche l'addizione di P_2O_5 stabilizza le forme β e α' -belite. La forma α' si idrata però più rapidamente.

È stato osservato che si può conseguire un'attivazione assai efficace combinando un aumento del contenuto di alcali della miscela generatrice, con una velocità di raffreddamento molto rapida del clinker prodotto ($\sim 1000^{\circ}K/min$), specie nell'intervallo di temperatura $1300-900^{\circ}C$ (11). Viene in tal modo conservata, almeno parzialmente, nel clinker formato ad alta temperatura la modificazione α' - C_2S , più reattiva di quella β - C_2S .

La reattività è inoltre ulteriormente accresciuta da difetti che, per effetto del rapido raffreddamento, vengono a formarsi nel reticolo cristallino del C_2S .

Nella fase α' - C_2S stabilizzata vengono inclusi circa 5% di ossidi alcalini ed altri ioni estranei, quali SO_4^{-2} (12). Impiegando come droganti tali ioni, il clinker prodotto contiene β - C_2S anche con un'elevata velocità di raffreddamento, però la modificazione β - C_2S , drogata con ioni $(SO_4)^{-2}$ è molto più reattiva della forma priva di ioni $(SO_4)^{-2}$.

La quantità di SO_3 nella miscela generatrice va opportunamente regolata, poiché alti contenuti di solfato ostacolano la formazione del C_2S .

Anche l'ossido di bario, aggiunto alla miscela generatrice, incrementa la reattività del C_2S (13).

La resistenza a compressione a 28 giorni dei cementi belitici attivati, a parità di finezza, risulta simile a quella del cemento Portland ordinario, anche se, a tempi minori, la resistenza è più bassa. Ad un anno, per il più alto contenuto di C-S-H e la minor formazione di idrossido di calcio a seguito dell'idratazione, la resistenza a compressione può anche esser più alta.

Il calore d'idratazione risulta più basso, mentre il numero maggiore delle altre proprietà è simile a quello del cemento Portland ordinario.

La composizione delle paste indurite, preparate sia con cemento belitico attivato, sia con cemento belitico, è simile a quella del cemento Portland ordinario, fatta eccezione per un più basso contenuto di portlandite ($Ca(OH)_2$), che non influenza negativamente l'attitudine alla carbonatazione delle strutture in calcestruzzo (14).

L'attivazione alcalina aumenta il contenuto di alcali della pasta. Tale contenuto può risultare critico, specie in presenza di un aggregato per calcestruzzo reattivo agli alcali, anche se è stato osservato (15) che il contenuto di alcali nella soluzione dei pori della pasta di cemento belitico non supera quello della pasta di cemento Portland ordinario.

L'attivazione alcalina può anche comportare la formazione di anelli nel forno rotativo e la precipitazione di depositi nelle apparecchiature di preriscaldamento.

Un serio problema tecnico che si incontra nella produzione di clinkers belitici attivati è rappresentato dalla necessità di dover impiegare, in scala industriale, un raffreddamento estremamente rapido. Al contrario di quanto è possibile compiere in laboratorio con una tempra in acqua del clinker, con i raffreddatori industriali si raggiunge una velocità di raffreddamento compresa fra 150 e 300°K/min, inferiore alla velocità richiesta per un'efficace attivazione (~1000°K/min).

Un raffreddamento estremamente rapido incide fortemente sull'economia termica del processo di cottura, poiché causa perdite di calore che salgono da 450 KJ/Kg, per un clinker normalmente raffreddato, a 650 KJ/Kg per un clinker energeticamente raffreddato. Ciò annulla in pratica il risparmio di energia ottenu-

to con l'abbassamento del fattore di saturazione di calce della miscela generatrice e della temperatura di cottura (16).

Il clinker belitico ha una tessitura piuttosto fine, con cristalli di belite di circa 10 micron. È anche piuttosto poroso, ciò che lo rende più facilmente macinabile.

Il cemento belitico, che rispetta le prescrizioni in atto per il Portland ordinario, mostra basso calore d'idratazione ed appare adatto per realizzare strutture per le quali un elevato sviluppo di resistenza meccanica a tempi brevi non è il requisito essenziale.

Proprio l'assenza di questo requisito ha notevolmente rallentato la diffusione della tecnologia di produzione dei cementi belitici.

Al fine di aumentare la reattività della belite è imperativa la messa a punto di processi industriali di raffreddamento rapido e di metodologie di dispersione omogenea di droganti e di stabilizzanti chimici, da impiegare a basso dosaggio (17).

Al fine di incrementare la reattività, si guarda anche alla produzione di una belite ad alta area superficiale e pertanto più facilmente idratante, mediante un processo in via di messa a punto, denominato "remelting reaction", che comporta una reazione di rifusione del clinker belitico.

Ciò, per renderlo facilmente macinabile ed economizzare in tal modo la gran quantità di energia che un processo di macinazione ordinaria richiederebbe. La reazione prevede una diffusione atomica e consiste in una decomposizione di un solido in un altro solido ed in un liquido nel corso del raffreddamento. La velocità della reazione di rifusione dipende dal rapporto Al/Fe della α -fase madre e dalla temperatura.

Al presente, la bassa resistenza dei cementi belitici alle brevi stagionature, può esser superata con l'ausilio di additivi chimici (polimeri acrilici) (17).

Cementi solfobelitici

Si sono sviluppati in Cina nel 1970.

Contengono solfoalluminato di calcio (yeelimite $\text{Ca}_4\text{Al}_6\text{O}_{12}(\text{SO}_4)$), accanto alla belite ed anche solfato di calcio, in quantità maggiore del cemento Portland ordinario. Non contengono alite, né alluminato tricalcico, ma possono recare quantità variabili di fase ferrica.

Sono prodotti a temperature molto inferiori a quelle richieste dal cemento Portland (9).

Le quantità di ciascuna fase possono variare entro i seguenti limiti:

C_2S 10-60%; $4\text{CaO} \cdot 3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SO}_3$ 10-55%; 2CaO (Al_2O_3 , Fe_2O_3) 0-40%; CaSO_4 0-25%.

I cementi solfobelitici sono cementi ad alta resistenza iniziale (15 MPa dopo due ore), che possono esser espansivi e non espansivi, a seconda delle proporzioni di belite e di solfoalluminato nel clinker e del contenuto di solfato di calcio, aggiunto al clinker in fase di macinazione.

La miscela generatrice, costituita da scoria d'alto forno e gesso, unitamente ad aliquote di calcare ed argilla, viene cotta in un forno rotativo classico, alla temperatura di 1200-1300°C. Per ottenere i più alti valori di resistenza meccanica, la cottura viene condotta ad una temperatura inferiore a quella di fusione, poiché se questa fosse raggiunta, l'idratazione subirebbe un ritardo (18).

Il clinker è relativamente friabile e richiede una ridotta energia di macinazione.

Il processo di clinkerizzazione inizia con la disidratazione del gesso a circa 100-120°C, seguita dalla decomposizione dei minerali delle argille a circa 300-600°C. A circa 700°C inizia la decarbonatazione del calcare, che si completa intorno a 900°C. Ad 800-900°C inizia la formazione di gehlenite ($2\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot\text{SiO}_2$), che si decompone sotto i 1200°C.

A circa 1000-1250°C ha luogo la formazione del solfoalluminato di calcio, che consuma il solfato di calcio libero. Il silicato bicalcico si forma fra 1000-1200°C. La fase ferrica incomincia a formarsi a circa 1100°C.

La cinetica di formazione del clinker è influenzata dalla presenza di ioni estranei. Il solfato di bario, ad esempio, abbassa la temperatura di formazione del silicato bicalcico ed accelera quella della fase ferrica.

La tessitura del clinker, rilevata in microscopia ottica (19), è caratterizzata dalla presenza di cristalli ben sviluppati di solfoalluminato, di dimensioni 1-10 micron, annegati in una matrice di silicato bicalcico di dimensioni di alcuni micron e di fase ferrica fra 2-8 micron, in cristalli colonnari.

La fase ferrica è più povera di allumina e la sua composizione è prossima a $\text{C}_6\text{A}\cdot\text{Fe}_2$ (19).

L'entalpia chimica di formazione del clinker solfobelitico è inferiore sia a quella del clinker di Portland ordinario, sia a quella del clinker belitico. Ciò è principalmente dovuto al minor contenuto di calcare della miscela generatrice e anche al fatto che un'aliquota di CaO è introdotta come solfato di calcio.

Per la più bassa temperatura di cottura, anche le perdite termiche risultano ridotte.

Le emissioni di CO_2 ed NO_x risultano del pari notevolmente ridotte (19).

Lo stadio iniziale dell'idratazione è caratterizzato da una rapida formazione di ettringite, con notevole consumo di solfoalluminato nelle prime ore (20).

Il grado d'idratazione cresce al crescere del quantitativo di solfato di calcio nel cemento (21).

Gli ioni solfato nella fase liquida accelerano l'idratazione iniziale.

Anche la fase ferrica si idrata assai rapidamente, con formazione di AFt (ettringite).

L'idratazione della belite è assai più lenta. Nei primi sette giorni si idrata soltanto una modesta frazione di essa. Entro 28 giorni (22) se ne idrata circa il 5-40% e la velocità d'idratazione aumenta all'aumentare del contenuto di SO_3 del cemento (21).

La fase C-S-H assicura alla pasta di cemento la resistenza finale.

Principali prodotti d'idratazione sono le fasi C-S-H ed AFt (ettringite).

L'alcalinità della soluzione dei pori della pasta di cemento è relativamente bassa (circa 9.5-10 pH (21)).

La porosità, a parità di rapporto acqua cemento, è notevolmente più bassa di quella delle paste di cemento Portland ordinario, per il più alto tenore di acqua combinata nelle fasi solide di neoformazione, particolarmente nella fase AFt.

Alcuni cementi solfobelitici possono esser classificati cementi espansivi. L'eventuale espansione dipende dalla maniera e dal momento della formazione di ettringite. Se essa viene a formarsi nella pasta, prima dello sviluppo di uno scheletro rigido, non si registra espansione, mentre essa si determina a seguito del decorso di una reazione topochimica, dopo che la pasta di cemento ha assunto una certa rigidità.

Sviluppo di resistenza ed entità di espansione, dipendono dalla composizione e dal rapporto delle fasi presenti, nonché dal contenuto di solfato di calcio del cemento.

È stato asserito (23) che per lo sviluppo ottimale della resistenza, il cemento richiede un rapporto molare $\text{SO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$ compreso fra 1.3-1.9. In tali condizioni, l'ettringite viene a formarsi prima della presa ed il solfoalluminato di calcio idrato, la fase principale che si forma negli stadi più avanzati dell'idratazione, corrisponde alla fase AFm che non provoca espansione.

Nelle paste mature è assente gesso non reagito.

Le Fig.1 e 2 (21) mostrano l'influenza della quantità di gesso, aggiunto in fase di macinazione, ad un clinker solfobelitico, contenente 10% in peso di SO_3 , sullo sviluppo della resistenza meccanica e sull'espansione del corrispondente cemento.

Si possono pertanto produrre sia un cemento ad alta resistenza iniziale, espansivo, sia un cemento non espansivo, variando semplicemente la quantità di gesso aggiunta, in fase di macinazione, al medesimo clinker.

La composizione di un cemento solfobelitico non espansivo è generalmente formulata in maniera tale che esso risulti un cemento ad alta resistenza iniziale.

Tali cementi, che hanno buona resistenza chimica in contatto con soluzioni di cloruro o solfato, mostrano un tempo di presa inferiore ad un ora e, per effetto di una rapida formazione di ettringite, sviluppano pronta resistenza iniziale. Dopo conversione della maggior parte del solfoalluminato in ettringite, lo sviluppo di resistenza rallenta, seguito, però, da un aumento, dovuto all'idratazione della belite. La resistenza continua a crescere nell'intervallo di tempo 28 giorni - un anno.

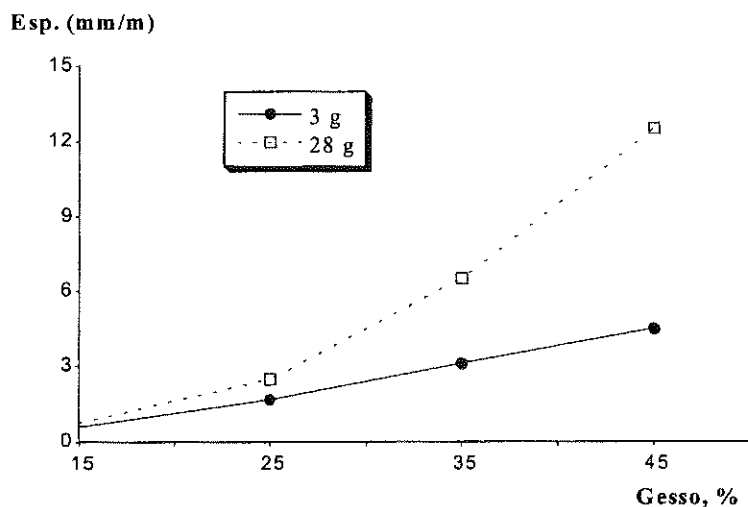


Figura 1 - Effetto del gesso macinato insieme ad un clinker solfobelitico sull'espansione del corrispondente cemento. SO_3 nel clinker = 10.0 % (21)

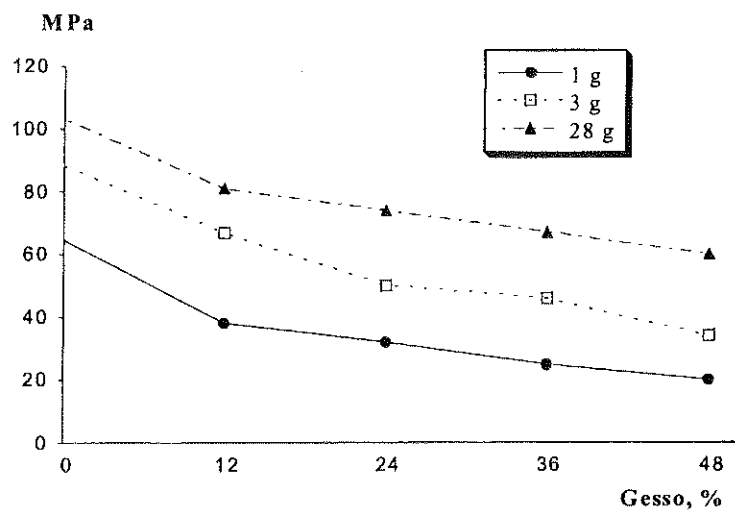


Figura 2 - Effetto del gesso macinato insieme ad un clinker solfobelitico sulla resistenza a compressione del corrispondente cemento. SO_3 nel clinker = 10.0 % (21)

Benchè la formazione di ettringite sia accompagnata da rapido sviluppo di calore, i cementi solfobelitici hanno un calore d'idratazione intorno a 200KJ/Kg (24), pertanto più basso di quello del cemento Portland, a causa dell'assenza di alite e di alluminato tricalcico. Tale sviluppo di calore decresce all'aumentare del contenuto di belite.

Il cemento solfobelitico appare più sensibile alla carbonatazione del cemento Portland ordinario, perché, oltre alle fasi Portlandite e silicato di calcio idrato, anche l'ettringite, presente nelle paste indurite, può reagire con l'anidride carbonica dell'aria (25). Con il passaggio alla forma liquida dell'acqua combinata nel reticolo cristallino dell'ettringite, la porosità aumenta. In generale, la resistenza alla carbonatazione cresce al crescere del contenuto di silicato bicalcico del cemento.

Più recentemente è stato affermato (26) che l'esclusione della CO_2 nel corso dell'idratazione del solfoalluminato di calcio comporta la formazione di ettringite. In presenza di CO_2 , la formazione di carboalluminato di calcio impedisce lo sviluppo di ettringite. Dopo la formazione della fase AFt, l'idrocarbonato e la CO_2 non influenzano la stabilità dell'ettringite.

È stata riscontrata una bassa alcalinità della soluzione dei pori della pasta dei cementi solfobelitici, insufficiente per la passivazione dell'acciaio. L'inconveniente si supera mediante addizione al cemento solfobelitico del 15% di cemento Portland (27).

È possibile anche migliorare le proprietà del cemento solfobelitico mescolandolo con cemento Portland. Le relative malte denunciano aumento di resistenza meccanica (28). Le proprietà meccaniche e fisiche dipendono dal tipo di cemento solfobelitico aggiunto al cemento Portland ad alto contenuto di belite. Tale tipo di cemento e le sue miscele possono esser usate con successo in sostituzione del cemento Portland (28).

A seguito dell'alto contenuto di SO_3 , il cemento solfobelitico non soddisfa le prescrizioni relative al cemento Portland ordinario. In Cina, dove si producono circa un milione di tonnellate anno di tale cemento, si è reso necessario redigere Norme particolari (29).

Conclusioni

L'interesse per i cementi belitici è nato sulla scia della stretta energetica degli anni settanta, che ha indirizzato le ricerche verso cementi a ridotto consumo di energia. I cementi belitici, dopo idratazione originano, fra l'altro, anche una matrice più durevole.

Una più vasta diffusione della loro tecnologia di produzione richiede tuttavia la messa a punto di processi industriali di raffreddamento rapido e di metodologie di addizione, a basso dosaggio, di droganti e di stabilizzanti della belite.

I cementi Portland modificati, nei quali i costituenti maggiori sono la belite ed il solfoalluminato di calcio e che richiedono una temperatura di cottura ben più bassa di quella del cemento Portland, risultando, per lo più, cementi non espansivi, ad alta resistenza iniziale, si rivelano utili per operazioni di pronto intervento e per la loro resistenza agli agenti chimici.

Inoltre, un gran numero di materiali da costruzione innovativi possono esser realizzati impiegando cementi solfobelitici: calcestruzzi ad alta resistenza iniziale, intonaci autolivellanti, ottime malte autolivellanti e compositi ad alte prestazioni, rinforzati con fibre di vetro.

Questi materiali riposano su tre principali proprietà: formazione rapida di ettringite, proprietà espansive dell'ettringite, bassa alcalinità della soluzione dei pori delle matrici cementizie (30).

Bibliografia

- (1) Stark J., Muller A., Schrader R., Rimpler K. Existence conditions of hydraulically active belite cement. *Zement-Kalk-Gips*, 34, 476-481 (1981).
- (2) Lea's chemistry of cement and concrete. P.C. Hevlett Ed. 439-441. Elsevier Butterworth-Heinemann. Oxford (2004).
- (3) Ludwig U., Pohlmann R. Investigation on the production of low lime Portland cements. *Proc. 8th ICCG*, II, 363-371. Rio de Janeiro (1986).
- (4) Popescu C.D., Muntean M., Sharp J.H. Industrial trial production of low energy belite cement. *Cement Concrete Composites*, 25, 689-693 (2003).
- (5) Odler I. *Special Inorganic Cements*, 62-63. E.&F.N. Spon. London (2000).
- (6) Ikabata T., Takemura H. Influence of the composition of interstitial phases on the hydration properties of belite cement. *Proc. 10th ICCG*, 2ii007. Gotheborg (1997).
- (7) Chatterjee A.K. High belite cements – present status and future technological options, *Cement Concrete Res.*, I, 26, 8, 1213-1225; II, 26, 8, 1227-1237 (1996).
- (8) von Lampe F., Seydel R. On a new form of α -belite. *Cement Concrete Res.*, 19, 509-518 (1989).
- (9) Sahu S. Developments in low energy clinkers. *Ceramic-Silikaty*, 38, 191-200 (1994).
- (10) Stark J., Muller A. International development trends in low-energy cements. *Zement-Kalk-Gips*, 41, 162-164 (1988).
- (11) Milke I., Muller A., Stark K.J. Active belite cement. *Proc. 9th ICCG*, 2, 399-405. New Dehli (1992).
- (12) Stark K.J., Muller A., Milke I. On belite clinkers containing SO_3 . *Silikattechnik*, 38, 381-385 (1987).
- (13) Rajczyk K. Hydraulic activity of low temperature dicalcium orthosilicate modified by BaO addition. *Proc. 10th ICCG*, 2ii 045. Gotheborg (1997).
- (14) Fuhr C., Muller A., Knofel D. Durability of mortars and concretes with varying lime standards. *Proc. 9th ICCG*, 5, 26-31. New Dehli (1992).
- (15) Fuhr C., Knofel D. Activated belite-rich cements – ready for practical use? Investigation of pure fluids and durability. *Proc. 9th ICCG*, 5, 32-38. New Dehli (1992).
- (16) Locher F. W. Low energy clinker. *Proc. 8th ICCG*, 1, 57-67. Rio de Janeiro (1986).

- (17) Chatterjee A. K. High-belite Portland cement - An update on development characterization and applications. Proc. 11th ICCI, 1, 31-40, Durban (2003).
- (18) Ikeda K. Cement along the join $C_4A_3SO_3$ - C_2S . Proc. 7th ICCI, II, III-31-36, Paris (1980).
- (19) Takuma Y. et al. Effect of reducing the CO₂ emissions and the characteristics of the clinker in the system C_2S - $C_4A_3SO_3$ - C_4AF - $CaSO_4$. Journ. Ceramic Soc. Japan, 102, 1115-1121 (1994).
- (20) Ali M.M., Bhargava R., Ahluvalin S.C. Hydration characteristics of magnesia assimilated sulfoaluminate-belite cement. Proc 10th ICCI, 2ii 006. Gotheborg (1997).
- (21) Wang Y. et al. A quantitative study of paste microstructure and hydration characteristics of sulfoaluminate cement. Proc. 9th ICCI, 4, 454-460. New Dehli (1992).
- (22) Malami C. A. et. A study on the behaviour of non-expansive sulfoaluminate cement in aggressive media. World Cement, 27, 129-133 (1996).
- (23) Sudoh G., Ohta T., Harada H. High strength cement in the CaO - Al_2O_3 - SiO_2 - SO_3 system and its application. Proc. 7th ICCI, 3, V, 152-157. Paris (1980).
- (24) Su M. et al. Preliminary study on the durability of sulfo/ferro-aluminate cements. Proc. 10th ICCI, 4iv 029. Gotheborg (1997).
- (25) Beretka J. Effect of composition on the hydration properties of rapid hardening sulfoaluminate cement. Proc. 10th ICCI, 2ii 29. Gotheborg (1997).
- (26) Kouznetsova T. V., Ivaschenko S.I., Samchenko S.V. Stability of ettringite under carbonate corrosion at hydration of sulphoaluminate cement. 11th ICCI, 4, 2076-2082. Durban (2003).
- (27) Janotka I., Krajci L. An experimental study on the upgrade of sulfoaluminate-belite cement systems by blending with Portland cement. Advances in Cement Res., 11, 35-41 (1999).
- (28) Palou M., Majling J., Janotka I. The performance of blended cements based on sulfoaluminate belite and Portland cements. 11th ICCI, 4, 1896-1902. Durban (2003).
- (29) Zhang L., Su M., Wang Y. Development of the use of sulfo- and ferroaluminate cements in China. Advances in Cement Res., 11, 15-21 (1999).
- (30) Pera J., Ambroise J. New applications of calcium sulfoaluminate cement. Cement Concrete Res., 34, 4, 671-676 (2004).

La scoria granulata d'alto forno attivata con soluzione alcalina o con clinker nel cemento d'alto forno. Un paragone

Granulated Blastfurnace Slag activated with alkali solution and Portland clinker, respectively. A comparison

R. Sersale e G. Frigione

Presentata dal Socio Riccardo Sersale
(Adunanza del 5 novembre 2004)

Riassunto - Il comportamento del cemento di scoria d'alto forno granulata, attivata con alcali, viene paragonato con quello di un tipico cemento d'altoforno. L'attivazione della scoria è stata pertanto effettuata con sola acqua, con soluzione di silicato sodico e con il clinker di Portland di un cemento ad alto contenuto di scoria, rispettivamente. È stato posto in luce che il clinker resta tuttora il miglior attivatore della scoria.

Summary - The behaviour of an alkali activated blast furnace slag cement has been compared with that of a typical blast furnace slag cement. Slag activation has been therefore performed with plain water, with sodium silicate solution and with the Portland clinker of a high-slag blastfurnace cement, respectively. Results give evidence that Portland clinker still remains the best slag activator.

Introduzione

L'attivazione alcalina di prodotti idraulicamente attivi (scoria d'alto forno, ceneri volanti, metacaolino) costituisce un indirizzo di ricerca largamente coltivato.

L'impulso alla ricerca in questa direzione è stato determinato dal fatto che i cementi alcalini rappresentano un'alternativa valida alla produzione di cemento Portland che impegna energia ed ha un forte impatto ambientale, perché comporta l'emissione nell'atmosfera di CO_2 , SO_2 , NO_x . L'impiego di sottoprodotti

industriali e la messa a punto di tecnologie più amiche dell'ambiente, unitamente all'abbassamento dei costi di produzione dei leganti, rivestono pertanto particolare importanza.

L'attivazione alcalina è un processo chimico che determina la trasformazione di alcune strutture, parzialmente o totalmente amorfe e/o metastabili in reticoli cementizi compatti [1] ed è applicabile a materiali quali ceneri volanti, similmente al caso della scoria d'alto forno. Secondo il tipo di allumosilicato, l'attivazione con alcali può avvenire a temperatura ambiente, o può richiedere più alte temperature.

I prodotti d'idratazione sono soprattutto: silicati di calcio idrati con rapporto calce/silice 1:1 ed allumina in soluzione solida. Ricontrati talvolta anche idrotalcite $[Mg_6Al_2(CO_3)(OH)_{16}4(H_2O)]$, fasi AFt ed idrogranati per stagionatura a temperatura.

L'aumento del tenore di silicato del prodotto di partenza (ceneri volanti), favorisce la formazione di zeoliti di formula generale $R_2O \cdot Al_2O_3 \cdot xSiO_2 \cdot nH_2O$, dove x può variare da 2 a 4, se si impiega stagionatura a vapore.

In dipendenza del tipo di allumosilicato, l'attivazione alcalina può decorrere a temperatura ambiente, o richiedere temperature più alte.

Gli studi si sono sostanzialmente orientati a determinare resistenza meccanica e durabilità di tali nuovi leganti.

Bakharev *et al.* [2] hanno valutato la resistenza del calcestruzzo di scoria attivata con alcali all'attacco solfatico, attraverso il rilevamento della resistenza a compressione di provini, dopo immersione sia in solfato di sodio, che di magnesio. Gli AA hanno impiegato come termine di riferimento il cemento Portland ordinario ed hanno posto in luce il miglior comportamento del calcestruzzo di scoria attivata con alcali. Principali prodotti del degrado sono risultati: *solfato di calcio* ed ettringite per il calcestruzzo di cemento Portland e *solfato di calcio* per quello di scoria attivata.

De Gutierrez *et al.* [3] hanno rilevato l'eccellente durabilità delle malte di scoria attivata con vetro solubile, per esposizione ad ambienti solfatici e di cloruro. Hanno attribuito la bassa permeabilità ai cloruri al ridotto adsorbimento capillare.

Deja *et al.* [4] hanno esaminato la resistenza di malte di scoria attivata con alcali all'azione di soluzioni di cloruro di magnesio. Considerato che la zona di transizione pasta di cemento Portland - aggregato influenza resistenza, permeabilità e durabilità e che la durabilità di malte e calcestruzzi di scoria attivata con alcali è molto alta, hanno attribuito tale durabilità ad una microstruttura molto densa, con un contenuto di pori capillari molto basso. Hanno rilevato coefficienti di diffusione notevolmente minori e zone interfacciali molto più dense fra pasta e sabbia quarzosa nelle malte di scoria attivata con alcali, rispetto a quelle di cemento Portland.

Shi [5] ha esaminato l'idratazione ed i relativi prodotti dei cementi di scoria attivata con alcali, unitamente alle interazioni fra ioni alcalini e silicato di calcio idrato (C-S-H) ed alla lisciviazione degli alcali incorporati nel C-S-H. Esso, con basso rapporto calce/silice ed una significativa quantità di alcali incorporato, risulta il principale prodotto d'idratazione del cemento di scoria attivata con alcali, simile a quello dei cementi Portland, benché alcuni prodotti d'idratazione minori possano variare in funzione della natura della scoria e dell'attivatore usato. L'alcali fornisce un ambiente ad alto pH ed agisce come catalizzatore, piuttosto che come reagente.

Polomo *et al.* [1] hanno posto in luce che sistemi cementizi costituiti da ceneri volanti attivate, sviluppano una resistenza meccanica più alta e più rapida di quella del cemento Portland.

Lee *et al.* [6] hanno rilevato che attivatori quali Na_2SO_4 , K_2SO_4 in malte di cenere volanti, accelerano lo sviluppo di resistenza meccanica alle brevi stagionature. La loro resistenza risulta paragonabile a quella, a 28 giorni, di campioni senza attivatore. Affermano che gli attivatori aumentano la formazione di ettringite. Na_2SO_4 risulta il più efficace acceleratore del consumo di $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ed aumenta il tenore di ettringite, alla quale attribuiscono la più alta resistenza alle brevi stagionature. L'aggiunta di attivatori si traduce inoltre in un incremento del volume dei pori più piccoli ed in un abbattimento della porosità totale delle paste di cemento, una delle ragioni principali della resistenza alle brevi stagionature.

Fernandez-Jimenez *et al.* [7] hanno indagato sulla relazione fra caratteristiche mineralogiche e microstrutturali di paste e malte a base di ceneri volanti attivate con alcali e le proprietà meccaniche, in funzione della durata della stagionatura e della temperatura. Hanno rilevato che la resistenza aumenta con l'eliminazione di particelle superiori a $45\text{ }\mu\text{m}$. Hanno suggerito che l'attivazione alcalina consiste in un processo chimico a seguito del quale la struttura vetrosa delle ceneri volanti origina un cemento molto compatto.

Il principale prodotto di reazione è un gelo amorfo di allumosilicato, con struttura simile a quella di alcuni precursori zeolitici.

Quando le ceneri volanti, e probabilmente anche la scoria, vengono poste in contatto con soluzioni di NaOH e stagionate a temperatura relativamente elevata, si forma un prodotto amorfo: un allumosilicato alcalino, con una minoranza di fasi cristalline. Le paste indurite, oltre ai prodotti presenti nelle ceneri di partenza, contengono anche alcune nuove fasi cristalline minori: idrossisodalite ed herschelite, un termine ad alto contenuto di potassio della serie delle cabasiti. L'intensità dei picchi di diffrazione dei raggi X che segnalano queste zeoliti, aumenta con il tempo di stagionatura.

Skvara *et al.* [8] hanno studiato gli effetti degli attivatori alcalini di tipo NaOH ed Na_2SiO_3 su sospensioni acquose di ceneri volanti, anche in presenza di scoria granulata d'alto forno. Hanno osservato che l'attivazione alcalina di

ceneri volanti in mezzo acquoso a $\text{pH} > 12$, è un processo che differisce dall'idratazione di leganti inorganici quali il cemento Portland. Nel processo che, per la maggior parte si svolge con un meccanismo di passaggio in soluzione, gli atomi di alluminio (e probabilmente anche quelli di calcio), penetrano nel reticolo silicatico originario delle ceneri volanti e producono un polimero inorganico idrato (geopolimero). I prodotti sono amorfi, con una minoranza di fasi cristalline.

Le proprietà delle ceneri volanti dipendono dalle modalità di preparazione della miscela e, in particolare, dalla concentrazione dell'attivatore alcalino e dalle condizioni di umidità.

I materiali prodotti per attivazione alcalina di ceneri volanti possono essere considerati ceramici chimicamente legati, o come geopolimeri, o come vetri allumosilicatici idrati di bassa temperatura. L'effetto di soluzioni alcaline (NaOH , Na_2CO_3 , Na_2SiO_3) su sostanze idraulicamente attive, quali scorie granulate d'alto forno o ceneri volanti, consiste nella rottura di legami Si-O-Si e nella successiva formazione di allumosilicati alcali-calce, simili alle zeoliti, idrati di tipo C-S-H, gehlenite idrata ed idrogranati [8]. La presenza di specie chimiche di tipo zeolitico è responsabile della modificazione delle proprietà dei leganti alcali-attivati, aumentando, ad esempio, la resistenza agli acidi [9].

Grutzeck *et al* [10] hanno aggiunto NaOH ad una formulazione convenzionale a base di ceneri volanti, idonea alla produzione di un calcestruzzo aerato, autoclavato, al fine di indurirlo. Hanno rilevato che una sufficiente aggiunta di alcali promuove la crescita di zeoliti cristalline in seno alla matrice tobermoritica, nel corso del trattamento in autoclave. Esse potrebbero assolvere al medesimo compito delle fibre..

Dalla rassegna or ora terminata risalta che, a parte le divergenze tra i risultati dei differenti autori, ragionevolmente dovuti alle differenze fra composizione dei prodotti di partenza, alla natura e concentrazione dell'attivatore, il principale promotore dello sviluppo della resistenza meccanica, alle condizioni di stagionatura e alle modalità operative, ecc., nella valutazione del comportamento dei leganti alcalini si è sempre assunto come termine di riferimento il cemento Portland.

Mentre sembrano necessarie ulteriori ricerche per quantificare gli effetti degli attivatori alcalini sullo sviluppo della microstruttura e resistenza dei prodotti finiti, con riferimento al livello di dosaggio e modalità di stagionatura, nonché sul meccanismo di indurimento [11], abbiamo creduto interessante paragonare l'azione attivante della soluzione alcalina sulla scoria granulata d'alto forno, con quella che si produce nel cemento d'alto forno, allorché l'azione attivante è esercitata principalmente dal clinker Portland. In una nota precedente [12] avevamo già sottolineato la funzione determinante della sua presenza in seno a leganti ad alto contenuto di scoria attivata con alcali.

Abbiamo perciò paragonato il comportamento della scoria granulata d'alto forno, attivata per impasto con soluzione di silicato sodico, con quello della medesima scoria attivata per miscelazione con il 30% di una miscela clinker Portland - gesso pari a 96 : 4 e miscelata con acqua, ossia con un cemento d'alto forno, del tipo III B (EN 196-1).

Delle modalità operative, dei risultati e delle conclusioni diamo conto nel corso di questa Nota.

Materiali

La composizione della scoria d'alto forno impiegata e quella del clinker di Portland utilizzato come attivatore, sono riportate in Tabella I.

Tabella I - Caratteristiche Chimiche dei Materiali

MATERIALE	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	K ₂ O + Na ₂ O	C ₃ S	C ₂ S	C ₃ A	C ₄ AF
Scoria granulata	36.4	10.8	0.7	42.3	8.1	0.3				
Clinker Portland	21.2	4.9	3.3	66.2	1.8	0.9	56	18	7.3	10.0

La soluzione di silicato sodico impiegata per l'attivazione della scoria da sola, aveva rapporto SiO₂/Na₂O pari a 1,0.

La finezza Blaine della scoria e del cemento d'alto forno era pari a 360 m²/kg.

Le prove meccaniche sono state espletate su provini di malta 40 x 40 x 160 mm, impiegando aggregato standard, secondo la Norma EN 196-1.

Come attivatori della scoria sono stati impiegati: una soluzione di silicato sodico, il clinker presente in un cemento d'alto forno e la sola acqua. Abbiamo creduto utile mostrare, come termine di paragone, anche l'attivazione della scoria d'alto forno ad opera della sola acqua, in quanto, come è noto, la scoria reagisce, seppur lentamente, con acqua per formare prodotti d'idratazione simili a quelli che si originano nel corso dell'idratazione del cemento Portland [13]. Gli ioni ossidrilici aumentano solo la velocità di reazione, favorendo la solubilizzazione del reticolo dei silicati ed alluminati.

Trascorse 24 ore a 20°C, in condizioni di umidità relativa superiori a 95%, i provini, il cui impasto è avvenuto con soluzione di silicato sodico e con acqua potabile per la miscela: 70% di scoria d'alto forno e 30% di cemento d'alto for-

no, sono stati sformati. Dopo stagionatura per 27 giorni in acqua e conservazione nelle condizioni di volta in volta indicate fino ai tempi prefissati di utilizzazione, una triade di provini di malta di ciascuna composizione è stata sottoposta alle prove seguenti:

- resistenza a compressione, dopo un anno di stagionatura in ambiente aria;
- resistenza a compressione, dopo un anno di stagionatura in acqua;
- resistenza a compressione, dopo tre anni di stagionatura in soluzione di solfato sodico (Na_2SO_4 2,1 %) [14];
- resistenza a compressione, dopo tre anni di stagionatura in soluzione di solfato di magnesio (MgSO_4 5,0 %);
- misura della profondità di carbonatazione dopo un anno di stagionatura a $15 \pm 15^\circ\text{C}$, umidità relativa $70 \pm 30\%$, in condizioni normali di concentrazione di CO_2 (0,03 % in volume). La spaccatura dei prismi di malta e la successiva asperzione di fenolftaleina sulle due facce, consentivano la misura della profondità di carbonatazione;
- resistenza al gelo-disgelo, mediante valutazione della perdita di peso del provino, dopo ciascun ciclo di 20 ore in aria a -18°C e 4 ore di immersione in acqua a 20°C ;
- resistenza al gelo - disgelo come sopra, dopo immersione in soluzione al 5 % di NaCl .

Risultati e discussione

La Fig. 1 consente di rilevare i valori della resistenza a compressione dei provini, in funzione del tipo di attivatore, dopo un anno di stagionatura in aria. Si va da 18 MPa per la scoria impastata con acqua potabile, a 32 MPa per quella attivata con soluzione di silicato sodico, a 48 MPa con quella attivata con il clinker nel cemento d'alto forno.

La Fig. 2 ripete le medesime misure dopo un anno di stagionatura in acqua e conferma il precedente andamento, tenendo conto dei guadagni conseguiti.

La Fig. 3 riporta i valori di resistenza a compressione dei provini, dopo stagionatura di tre anni in soluzione di solfato di sodio e conferma il clinker come più efficace attivatore.

La Fig. 4 ripete la medesima valutazione, dopo stagionatura dei provini in soluzione di solfato di magnesio e pone in luce il comportamento di gran lunga migliore della scoria attivata con il clinker del cemento d'altoforno.

La Fig. 5 riporta i risultati delle misure di profondità di carbonatazione su provini stagionati per un anno in ambiente d'aria. Anche qui il comportamento della scoria attivata nel *cemento d'alto forno* è superiore e conferma la vulnerabilità del cemento di scoria attivata con alcali da parte della CO_2 .

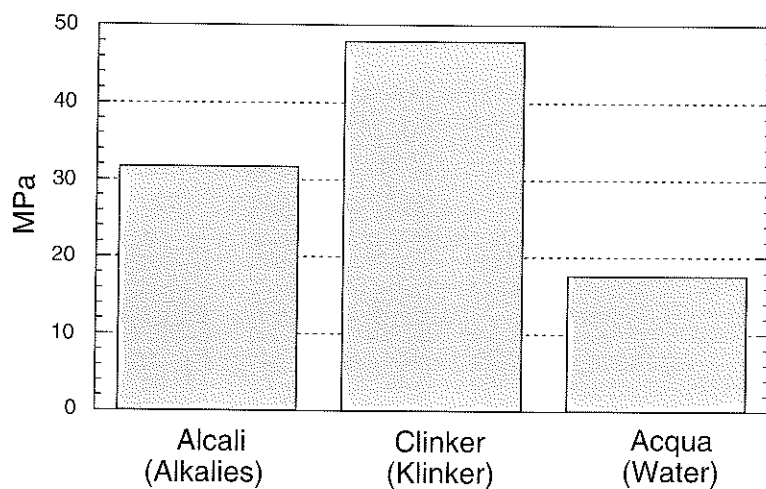


Figura 1 - Resistenza a compressione di provini di malta, stagionati un anno in aria. Scoria attivata con soluzione di silicato sodico, con il clinker nel cemento d'altoforno e con acqua.

Figure 1 - Compressive strength of mortar specimens stored one year in air. Blast furnace slag activated with sodium silicate solution, klinker in blast-furnace cement and water.

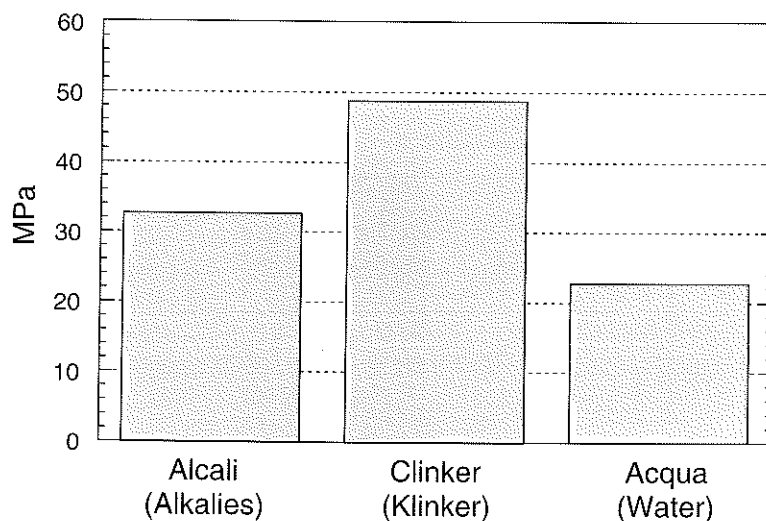


Figura 2 - Stesse valutazioni della Fig. 1, dopo stagionatura dei provini di malta in acqua per un anno.

Figure 2 - Same evaluations as in Fig. 1, after one year storing of mortar specimens in water.

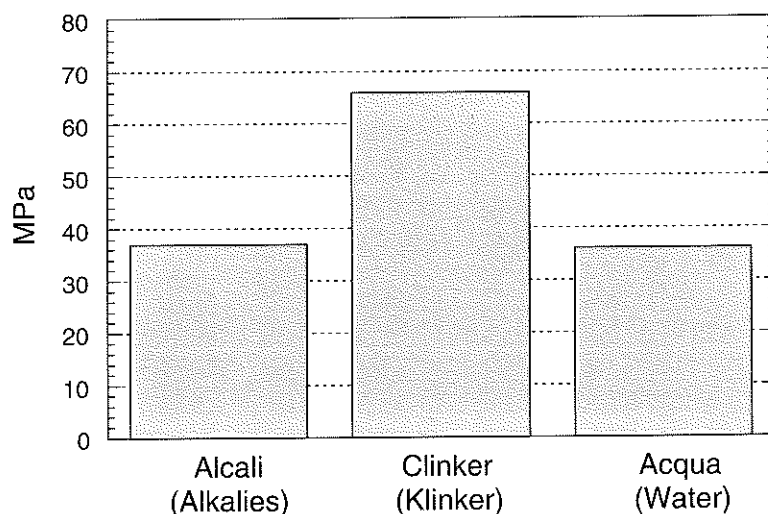


Figura 3 - Le stesse valutazioni della Fig. 1, dopo stagionatura dei provini di malta in soluzione di solfato sodico per tre anni.

Figure 3 - Same evaluations as in Fig. 1, after three years storing of mortar specimens in sodium sulphate solution.

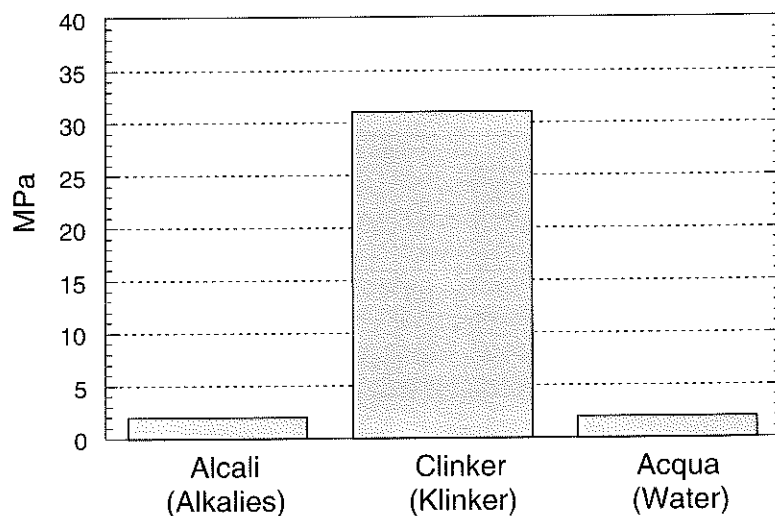


Figura 4 - Le stesse valutazioni della Fig. 1, dopo stagionatura dei provini di malta in soluzione di solfato di magnesio per tre anni.

Figure 4 - Same evaluations as in Fig. 1, after three years storing of mortar specimens in magnesium sulphate solution.

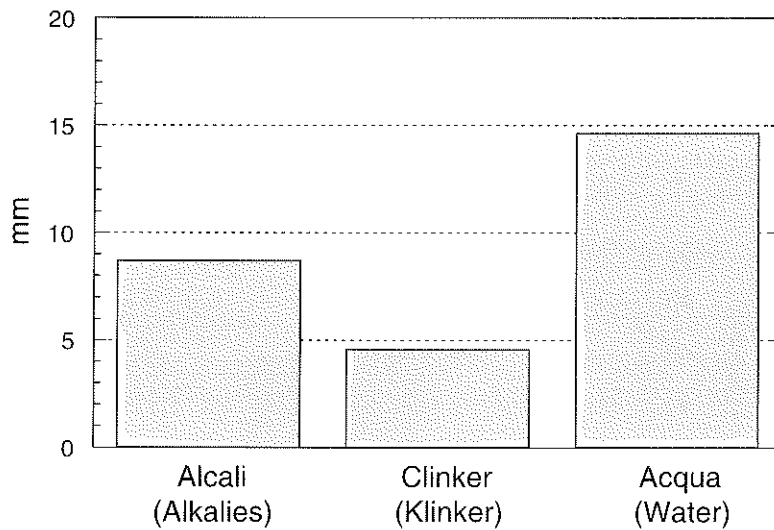


Figura 5 - Profondità di carbonatazione di provini di malta, dopo un anno di conservazione in aria in condizioni normali di CO_2 .

Figure 5 - Carbonation depth of mortar specimens after one year storing in air in ordinary CO_2 conditions.

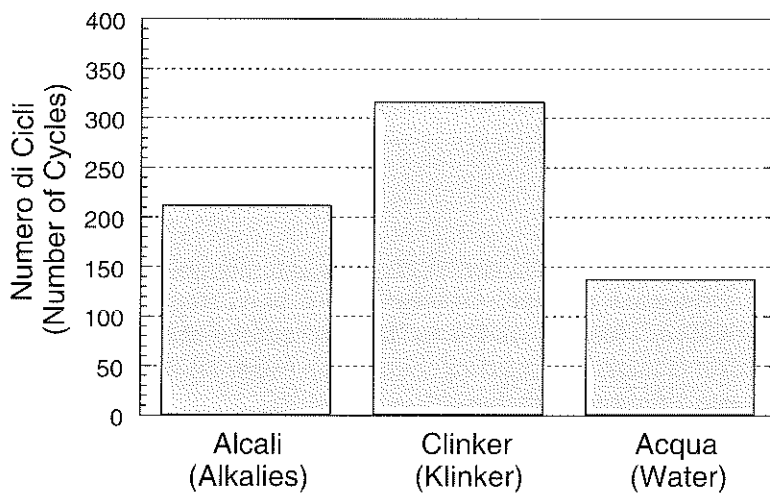


Figura 6 - Resistenza al gelo-disgelo di provini di malta. Numero di cicli sopportati dopo ricorrenti immersioni in acqua.

Figure 6 - Freezing-thawing resistance of mortar specimens. Cycle numbers sustained after recurring immersion in water.

La Fig. 6 si riferisce a prove di resistenza al gelo-disgelo di provini. Il numero di cicli che la scoria attivata nel *cemento d'alto forno* riesce a sopportare è nettamente maggiore.

La Fig. 7 ripete la medesima valutazione dopo immersione dei provini, dopo ciascun ciclo, in soluzione di cloruro sodico. Anche qui, il comportamento della scoria attivata con clinker è nettamente migliore.

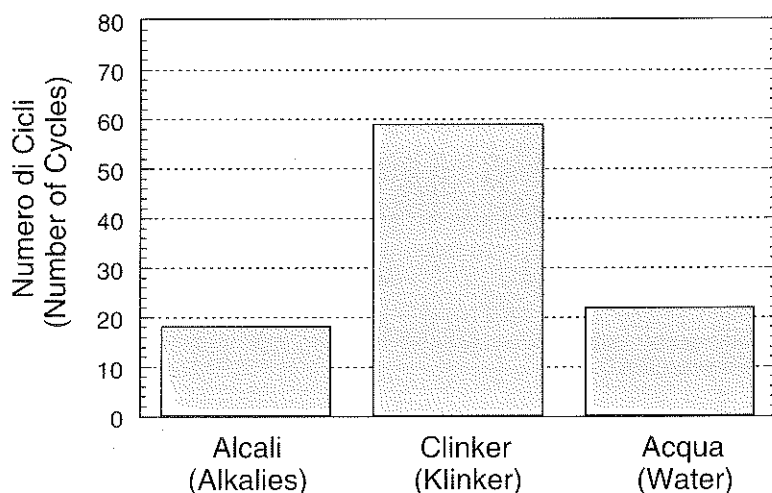


Figura 7 - Resistenza al gelo-disgelo di provini di malta. Numero di cicli sopportati dopo ricorrenti immersioni in soluzione di cloruro di sodio.

Figure 7 - Freezing-thawing resistance of mortar specimens. Cycle numbers sustained after recurring immersion in sodium chloride solution.

Conclusioni

I cementi di scoria attivata con alcali, utilizzati, più che altro, per opere che richiedono sviluppo di resistenza meccanica alle brevi stagionature ed ambienti aggressivi (solfato, cloruro), sono considerati cementi a basso consumo di energia. Rispetto al cemento Portland ne consentono infatti un risparmio del 30-35% e ne abbassano i costi di produzione di circa il 40%.

Fra gli svantaggi segnalati: caratteristiche di manipolazione sgradite, consistenza viscosa della miscela fresca, calcestruzzi che in assenza di ritardanti presentano tempo di presa molto brevi, vulnerabilità alla carbonatazione [15]. Incertezza tuttora regna sulla reazione alcali-aggregato.

I risultati di questa ricerca hanno posto in luce che, nelle condizioni sperimentali adottate: resistenza a compressione, al gelo-disgelo, all'attacco solfatico ed alla carbonatazione della scoria, da sola attivata con alcali, risultano decisa-

mente inferiori a quelle esibite da un cemento d'alto forno ad alto contenuto di scoria (70%).

Il clinker di Portland si rivela ancora il più efficace attivatore della scoria granulata, confermando la sua funzione determinante, già sottolineata in una precedente ricerca [12].

Le cause del comportamento meno buono della scoria attivata con alcali, sono ragionevolmente da ricercare, più che nella compattezza della microstruttura, che pure dimostra la sua validità, nella natura dei prodotti di neoformazione che risentono del vistoso numero di variabili che possono influenzare il processo di attivazione. Per il cemento d'alto forno, i principali prodotti di neoformazione rimangono quelli tipici: formazione di strutture fibrose od aghiformi costituite da CSH, laminette a contorno esagonale costituite da alluminati di calcio idrati [16].

Bibliografia

- [1] Palomo A., Lopez de la Fuente J.I.; *Alkali-activated cementitious materials. Alternative matrices for immobilisation of hazardous wastes. Part I. Stabilisation of boron*. Cement Concr. Res., 33, 2, 281-288 (2003).
- [2] Bakharev T., Sanjayan J.C., Cheng Y.B.; *Sulphate attack on alkali-activated slag concrete*. Cement Concr. Res., 32, 2, 211-216 (2002).
- [3] De Gutierrez R.M., Maldonado J., Delvasto S., Puertas F., Fernandez-Jimenez A.; *Durability of mortars made with alkali activated slag*. 11 th ICCI, 2, 1005-1010. Durban (2003).
- [4] Deja J., Przybylski K.; *Interfacial zone alkali-activated slag paste-sand in mortars cured in magnesium chloride solution*. 11 th ICCI, 3, 1322-1331. Durban (2003).
- [5] Shi C.; *On the state and role of alkali's during the activation of alkali-activated slag cement*. 11 th ICCI, 4, 2097-2105. Durban (2003).
- [6] Lee C.Y., Lee H.K., Lee K.M.; *Strength and microstructural characteristics of chemically activated fly-ash cement systems*. Cement Concr. Res., 33, 3, 425-431 (2003).
- [7] Fernandez - Jimenez A., Palomo A.; *Alkali activated fly ashes: properties and characteristics*. 11 th ICCI, 3, 1332-1340. Durban (2003).
- [8] Skvara F., Slosar J., Bohunek J., Markova A.; *Alkali-activated fly ash geopolymeric materials*. 11 th ICCI, 3, 1341-1350. Durban (2003).
- [9] Allahverdi A., Skvara F.; *Acid corrosion of geopolymeric cements*. Proc. 7th CANMET Int. Conf. on fly ash, silica fume, slag and pozzolanas in concrete. 2, 561-579 (2001).
- [10] Grutzek M., Kwan S., Di Cola N.; *Zeolite formation in alkali - activated cementitious systems*. Cement Concr. Res., 34, 6, 949-955 (2004).

- [11] Krizan D., Zivanovic B.; *Effect of dosage and modulus of waterglass on early hydration of alkali-slag cement*. Cement Concr. Res., 32, 8, 1181-1188 (2002).
- [12] Sersale R., Frigione G.; *Durability of blast furnace slag-based cementing materials*. 11 th ICCC, 3, 1719-1725. Durban (2003).
- [13] Smolczyk H.G.; *Structure et caractérisation des laitiers*. . 7th ICCC, 1, III-1/3 ÷ III-1/16. Paris (1980).
- [14] Farrel O'.M., Wild S., Sabin B.B.; *Resistance to chemical attack of ground brick-PC mortars. I. Sodium sulphate solution*. Cement Concr. Res., 29, 11, 1781-1790 (1999).
- [15] Lea S.; *Chemistry of Cement and Concrete*. Fourt Ed., P.C. Hewlett Ed., 455-459. Elsevier Ltd (2004).
- [16] Sersale R., Marchese B., Frigione G.; *Microstructure et proprietes de ciments hydratés à différentes teneurs en laitiers*. 7th ICCC, II, III-63/III-73. Paris (1980).

**Le ceneri volanti:
un prodotto supplementare ancora poco usato nel mondo
per la fabbricazione di cementi compositi**

***Pulverized-fly ashes:
a supplementary addition poorly employed in the world
for the manufacturing of blended cements***

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 3 dicembre 2004)

Riassunto - Poiché l'industria cementiera utilizza tuttora un volume relativamente basso delle ceneri volanti prodotte nelle centrali termiche del mondo, si è ritenuto utile passare in rassegna i risultati delle più recenti ricerche sulle caratteristiche di comportamento tecnico e sulle proprietà dei cementi alla cui produzione concorrono.

Dall'esame di tali risultati risulta evidente che sussistono tutti i presupposti per un più largo impiego di tale prodotto supplementare, in vista dei vantaggi economici ed ecologici che determina e delle migliorate caratteristiche dei relativi cementi, rispetto a quelle del cemento Portland.

Parole chiave: ceneri volanti polverizzate; cementi compositi; miscele per calcestruzzo.

Summary - Considering that cement industry makes still use of a relatively low volume of pulverized-fly ashes coming from the power stations in the world, it has been deemed worthy to review the latest results of the researches, carried out in order to shed light on this subject.

A comprehensive view of these results shows that all the premises exist for a wider utilization of fly ashes in cement industry, considering the economical and ecological advantages and the improvement of the technical behaviour of the blended cement, with reference to that of Portland cement.

Key words: pulverized-fly ashes; blended cements; concrete mixes.

Le ceneri volanti polverizzate costituiscono il prodotto della combustione del carbone finemente macinato, passante al vaglio di 75 μm , insufflato ad alta velocità, con una corrente d'aria calda, nella fornace di un impianto di genera-

zione di energia elettrica. Entrando nella fornace, nella quale la temperatura normalmente si aggira intorno a 1500°C , il contenuto carbonioso del combustibile in sospensione istantaneamente brucia. La materia residua che accompagna il carbone (argilla, scisti), costituita essenzialmente da silice, allumina, ed ossido di ferro, rapidamente fonde nella sospensione, e, a seguito di un veloce raffreddamento, perché trascinata dai fumi, si trasforma in fini particelle sferiche. Circa l'80% della cenere viene trascinata via dalla fornace con i fumi e deve essere recuperata, prima che vengano immessi nell'atmosfera. È questo il prodotto normalmente denominato cenere volante. La rimanente cenere cade sul fondo della fornace, dove sinterizza e forma un prodotto grossolano, denominato cenere di fondo.

Una pluralità di metodi opera il recupero della cenere volante dai fumi, ciò che può comportare variazioni delle sue caratteristiche. Come norma generale, la cenere volante estratta dai collettori meccanici è più grossolana di quella raccolta dai precipitatori elettrostatici (1) ed è quest'ultima che viene ordinariamente impiegata nell'industria cementiera.

Per l'impiego come prodotto supplementare per la produzione di cementi compositi, le ceneri volanti possono esser distinte in due categorie:

- 1) ceneri volanti a basso contenuto di calcio, dotate di autentica attività "pozzolanica", che, per azione di un attivatore (la calce), danno luogo ad una reazione che induce proprietà cementanti.
- 2) ceneri volanti ad alto contenuto di calcio, dotate di per se stesse di proprietà cementanti, in aggiunta ad una certa attività "pozzolanica".

Una tale classificazione discende generalmente dal tipo di carbone impiegato nelle centrali termiche e sostanzialmente coincide con le ceneri volanti delle classi F, dotate di attività "pozzolanica" e C, dotate di proprietà cementanti, rispettivamente, come stabilito dalla Norma ASTM C 618-89.

Le ceneri volanti di classe F contengono meno del 10% di CaO e sono generalmente prodotte da antracite e litantraci. Sono povere di CaO ed MgO e relativamente ricche di SiO_2 ed Al_2O_3 .

Le ceneri di classe C recano un contenuto di CaO maggiore del 10% e generalmente derivano dall'impiego di ligniti xiloidi o picee. Contengono meno SiO_2 ed Al_2O_3 della classe F e più alto tenore di CaO , del quale una parte è presente come calce libera. Il principale costituente di entrambi le classi è una fase vetrosa, che generalmente costituisce il 60% o più del prodotto.

Benchè i costituenti non siano presenti come ossidi, si usa esprimere la composizione delle ceneri volanti come in Tab.1.

Nella tabella 1, che riporta anche la composizione chimica del cemento Portland ordinario (2), si rileva che le ceneri volanti sono essenzialmente costituite dagli stessi componenti del Portland, in differenti rapporti. Al fine di manifestare proprietà cementanti le ceneri richiedono pertanto della calce. Essa, nel corso

dell'idratazione dei silicati del Portland, viene fornita dall'idrossido neoformato, sicché i due prodotti possono esser vantaggiosamente miscelati.

Tabella 1 (% in peso)

	<i>Portland</i>	<i>Cenere classe F</i>	<i>Cenere classe C</i>
SiO_2	20	50	40
Al_2O_3	5	28	18
Fe_2O_3	3	9	8
CaO	64	3	20
MgO	2	1	4
SO_3	2	1	2
<i>Altri</i>	4	8	8

In presenza di calce, la superficie delle particelle di ceneri volanti viene attaccata dal H_3O^+ , risultante dalla dissoluzione degli anioni alcalini metallici, liberando uno strato amorfo ricco di Si/Al. Tale rilascio di alcali provoca un aumento del pH della soluzione, che accelera il processo di dissoluzione del vetro (3).

Le ceneri impiegabili nella preparazione del cemento e del calcestruzzo, constano in massima parte di particelle vetrose (20-90%), sferiche, cave, che costituiscono il principale componente attivo. Variazioni della forma e della tessitura superficiale possono determinarsi in dipendenza del carbone impiegato, delle modalità di polverizzazione, della temperatura del forno, dell'alimentazione di ossigeno e dei metodi di raccolta che, per le ceneri usate in cementeria, sono generalmente i precipitatori elettrostatici.

I maggiori costituenti minerali sono: quarzo, mullite, ematite, magnetite, calce, gesso, solfato di ferro, rutilo, cristobalite, sillimanite, ecc.

Nelle ceneri a basso contenuto di calcio, la fase vetrosa è di natura silicea o allumo-silicatica, mentre nelle ceneri ad alto contenuto di calcio è di natura calcio-alluminosa. Altri componenti attivi che determinano il carattere idraulico delle ceneri ad alto contenuto di calcio sono: la calce libera, l'anidrite, l'alluminato tricalcico, il solfoalluminato di calcio ($4CaO \cdot Al_2O_3 \cdot SO_3$) e raramente silicati di calcio. In generale, il contenuto di fase vetrosa nelle ceneri ricche di calcio è più basso di quello delle ceneri povere di calcio; risulta però più attivo.

La reattività delle ceneri volanti dipende dalla finezza, dalla natura e ammontare della fase vetrosa presente, la quale, a sua volta, dipende generalmente dalle condizioni operative del trattamento termico, per un determinato tipo e provenienza del carbone.

La finezza più generalmente impiegata corrisponde al passante al setaccio da 45 μm . La densità media si aggira fra 1.9 e 2.4, approssimativamente due terzi di quella del cemento Portland.

Il peso specifico apparente del prodotto sfuso è all'incirca 800 Kg/m^3 . Il colore dipende dal contenuto di carbone incombusto e dal contenuto di ferro.

Le principali caratteristiche fisiche e chimiche prescritte per l'impiego delle ceneri volanti nell'industria del cemento sono oggetto di una pluralità di norme standard redatte nei diversi Paesi. Si riportano le indicazioni delle Norme redatte in U.S.A ed in Italia (4).

La produzione corrente, annuale, di ceneri volanti nel mondo è dell'ordine di 450 milioni di tonnellate (5) e soltanto 25 milioni di tonnellate, il 6% del volume totale di ceneri disponibili, viene impiegato come "pozzolana" in cementi compositi od in miscele per calcestruzzo.

In Cina, la produzione di ceneri volanti da carbone, nell'anno 2000 ha superato i 160 milioni di tonnellate. Ancora molto basso è il loro impiego nell'industria cementiera (6).

In India si producono ogni anno più di 88 milioni di tonnellate di cenere volante e la maggior parte di esse è di classe F. Rimpiazzano normalmente il cemento nel calcestruzzo, ma la percentuale di utilizzazione si aggira intorno al 10-15% (7).

In Germania, per generare elettricità, si impiegano annualmente 55 milioni di tonnellate di carbone. La quantità di cenere impiegata ammonta a circa 4 milioni di tonnellate/anno, a fronte della produzione di clinker di Portland che raggiunge circa 25 milioni di tonnellate/anno (8).

In Italia la produzione annuale di ceneri volanti è dell'ordine di 1.500.000 tonnellate. Di esse circa 350.000 tonnellate/anno vengono destinate alla produzione di cemento composito, mentre circa 120.000 tonnellate si impiegano nella preparazione di miscele per calcestruzzo.

Poiché la via più economica di generazione di energia elettrica è tuttora quella da carbone, è presumibile che la produzione di ceneri volanti sia destinata ad aumentare.

L'impiego di ceneri volanti nell'industria cementiera si presenta allettante, perché riduce i costi di produzione del cemento e del calcestruzzo ed economizza energia, poiché sostituisce parzialmente il clinker di Portland, concorrendo, ad un tempo, alla salvaguardia dell'ambiente (9). Abbassa inoltre la richiesta d'acqua, frena l'innalzamento di temperatura nel corso del processo d'idratazione, migliora la lavorabilità degli impasti.

Le ceneri volanti hanno, però, un'area superficiale relativamente bassa. Pertanto, a temperatura ordinaria, la reazione "pozzolanica" (di fissazione, cioè, della calce proveniente dall'idratazione dei silicati costituenti del clinker) è lenta a partire e progredisce solo dopo alcune settimane dall'inizio dell'idratazione.

Ciò si traduce in un lento sviluppo di resistenza meccanica del manufatto a stagionature normali, anche se, a lungo termine, esso manifesta una più alta resistenza ed una maggiore durabilità. Al conglomerato deve pertanto esser assicurato un lungo tempo di stagionatura ad umido, per un accettabile sviluppo di resistenza meccanica.

Per superare tale effetto delle ceneri, alle brevi stagionature, sulle proprietà del corrispondente cemento e promuoverne un impiego sempre maggiore in cementeria, si registra in letteratura una notevole vivacità di ricerca, che affronta una pluralità di aspetti della reattività delle ceneri volanti di entrambi le classi, delle possibili modalità di attivazione, della resistenza meccanica e chimica dei manufatti, degli effetti sinergici di piccole aggiunte supplementari, dei possibili impieghi.

Convien pertanto passare in rassegna i risultati delle più recenti ricerche in argomento, al fine di poter disporre di un quadro sufficientemente completo dello stato delle conoscenze, che possa contribuire ad un impiego più ampio di ceneri volanti nell'industria del cemento e del calcestruzzo. È questo l'obiettivo della presente Nota.

Dietz ed altri (10) hanno sperimentato l'impiego di ceneri volanti da lignite come parziale rimpiazzo del clinker di Portland. Lo studio mineralogico ha posto in luce che esse constano di fasi pozzolaniche vetrose ricche di silicio, con costituenti idraulici latenti (fasi vetrose ricche di Al e Ca) e fornitori di CaO — ed SO_3 —. Hanno rilevato che le miscele cemento-cenere hanno buona stabilità di volume e bassa velocità di espansione, senza effetti negativi fino a livelli di rimpiazzo di cenere dell'ordine del 10-15% in peso.

La cenere ricca di silice reagisce come una "pozzolana", con un effetto diluente dovuto alla bassa reattività all'inizio dell'idratazione, con un contributo continuo, però, alla resistenza meccanica al crescere della durata dell'idratazione. L'alta reattività della cenere calcarea contribuisce invece allo sviluppo della resistenza meccanica anche a tempi brevi di idratazione. La calce libera della cenere calcarea si idrata completamente dopo due ore d'idratazione.

La carbonatazione cresce al crescere del contenuto di cenere (10), senza distinzione del tipo di cenere usata. Una prolungata durata della maturazione può ridurre la profondità di carbonatazione. La resistenza al gelo-disgelo decresce al crescere del contenuto di cenere. Nelle miscele contenenti cenere di lignite, è stata osservata una concentrazione di ettringite leggermente più alta, senza conseguenze sulla stabilità di volume.

Per migliorare la reattività delle ceneri volanti in seno al cemento, Katz ed altri (11) hanno studiato il meccanismo di attivazione delle ceneri volanti in contatto con soluzione alcalina (NaOH). Hanno rilevato che aumentando la concentrazione della soluzione attivante, cresce la resistenza a compressione. Essa diminuisce con la riduzione del rapporto acqua/cenere da 0.8 a 0.4.

Hardtl (12) ha studiato il decorso della reazione “pozzolanica” delle ceneri volanti di classe F in combinazione con cementi contenenti differenti quantità di scoria d’alto forno. Ha rilevato che, nei primi 28 giorni, la reazione “pozzolanica” delle ceneri è molto bassa. Essa aumenta a tempi più lunghi. La reazione della cenere decresce al crescere del contenuto di scoria, probabilmente per una minore disponibilità di Ca(OH)_2 . Al crescere della reazione “pozzolanica” aumenta, proporzionalmente al grado di reazione, la quantità di fasi C-S-H che determinano resistenza e struttura dei pori.

Temiz ed altri (13) hanno studiato gli effetti dell’aggiunta di cenere volante ad alto contenuto di calcio e di fumo di silice sulla microstruttura delle paste di cemento idratate. Rilevano che la cenere ad alto contenuto di calcio ed il fumo di silice reagiscono con la portlandite, originatasi a seguito dell’idratazione della frazione Portland, e formano silicato di calcio idrato, amorfo, (C-S-H gel), con conseguente riduzione del quantitativo di idrossido di calcio libero, dannoso per il calcestruzzo.

Fu ed altri (14) hanno studiato l’influenza del tenore di ceneri volanti sulle proprietà dei cementi compositi. Hanno posto in luce che la resistenza alle brevi stagionature del cemento ad alto contenuto di cenere decresce e la presa è relativamente lenta. Nondimeno l’attivatore (Na_2CO_3 e la melassa) migliora la resistenza a 28 giorni e considerevolmente quella a 90 giorni. Prodotti d’idratazione risultano: C-S-H- gel, ettringite ed una modesta quantità di calce.

Langan ed altri (15) hanno studiato l’influenza del fumo di silice e della cenere volante sull’idratazione iniziale delle miscele cementizie. Rilevano che la simultanea incorporazione di fumo e cenere nel cemento ritarda notevolmente l’idratazione, mentre il calore d’idratazione decresce.

Shehata ed altri (16) hanno studiato gli effetti dell’aggiunta di fumo di silice e cenere volante al cemento Portland, sull’espansione che fa seguito alla reazione alcali-aggregato. Hanno rilevato che per mantenere tale espansione al disotto del 0.04% dopo due anni, appaiono appropriati livelli di fumo di silice e di cenere volante, a basso, moderato e medio contenuto di calcio, rispettivamente del 5 e 15%. Per tutto il periodo della sperimentazione (tre anni), le paste Portland-fumo-cenere hanno mantenuto infatti bassa alcalinità della soluzione dei pori.

Lee ed altri (17) hanno studiato l’efficacia degli attivatori (Na_2SO_4 , K_2SO_4 , trietanolamina, rispettivamente), sullo sviluppo della resistenza meccanica di malte con ceneri volanti. Hanno posto in luce che K_2SO_4 è il più efficace per aumentare la resistenza alle brevi stagionature. Na_2SO_4 è invece il più efficace nell’accelerazione del consumo di Ca(OH)_2 . Gli attivatori aumentano la produzione di ettringite e la loro addizione determina un incremento del volume dei pori più piccoli ed un abbassamento della porosità totale. Ciò costituisce una delle principali ragioni dell’innalzamento di resistenza alle brevi stagionature delle malte con ceneri.

Kobayakava ed altri (18) hanno studiato l’effetto della reazione “pozzolanica” delle ceneri sulle proprietà della pasta indurita, con riferimento all’acqua

combinata, all'idrossido di calcio, alla distribuzione dei pori ed all'area superficiale specifica. Hanno calcolato un indice di reazione "pozzolanica", determinando la quantità di residuo insolubile, a differenti scadenze, nella pasta di cemento e rilevato che l'effetto della reazione "pozzolanica" sulla pasta di cemento (acqua combinata, consumo di calce, area superficiale, distribuzione dei pori), può esser descritto come funzione dell'indice di reazione della cenere. Il pH risulta un fattore chiave della reazione "pozzolanica".

Giergiczny (19) ha rilevato che il fumo di silice costituisce un 'aggiunta minerale che perfeziona l'attività "pozzolanica" delle ceneri volanti a basso contenuto di calcio. Essa migliora la resistenza a compressione in tutti gli stadi dell'indurimento del cemento, determinando un contenuto più basso di calce ed una minore porosità, con conseguente miglioramento della resistenza ad agenti aggressivi.

Wang ed altri (20) hanno studiato gli effetti della morfologia delle ceneri volanti in seno al cemento. Hanno rilevato tre aspetti di tale morfologia: un ruolo di riempimento, un ruolo giocato dall'area superficiale specifica, un ruolo lubrificante. Particelle più piccole possono riempire lo spazio fra quelle di cemento e ridurre l'acqua di riempimento. La richiesta d'acqua da parte degli strati superficiali è maggiore, quanto più fini le particelle e più grande l'area superficiale specifica. Particelle sferiche più piccole esercitano un ruolo lubrificante più energico.

Singh ed altri (21) hanno preso in esame il processo d'idratazione di cementi Portland/ceneri volanti, in presenza di superfluidificanti, quali: melamina solfonata condensata con formaldeide, e naftalensolfonato condensato con formaldeide, sia a 20, che a 60°C. Hanno posto in luce, specie a 60°C, una maggiore accelerazione dell'attività "pozzolanica" delle ceneri, insieme con un aumento della resistenza a compressione.

Antiohos ed altri (22) hanno sviluppato un nuovo prodotto supplementare, costituito da una miscela di ceneri volanti ad alto e basso contenuto di calcio, in differenti proporzioni. Il criterio di scelta delle ceneri ha assicurato alla nuova "pozzolana" una composizione ottimale. Hanno posto in luce che le miscele di ceneri ad alto e basso contenuto di calcio rappresentano una via di superamento delle limitazioni di ciascun tipo di cenere. Miscele con pari tenore di ciascuna cenere si sono dimostrate le più efficienti in termini di proprietà meccaniche a moderati livelli di sostituzione di cemento, laddove, per livelli più alti di sostituzione, le miscele con maggior contenuto di silice attiva hanno mostrato superiorità a tutte le scadenze.

Pretorius ed altri (23) hanno studiato l'influenza di cinque differenti tipi di cenere volante di classe F (ad alto contenuto di silice) sulle proprietà del corrispondente calcestruzzo. Hanno notato che i differenti tipi di cenere, provenienti dalla stessa fonte, differiscono notevolmente per dimensioni e distribuzione delle particelle. Le proprietà fisiche delle ceneri esercitano una influenza sulla lavorabilità degli impasti, influenza che si riflette sulla resistenza meccanica dei

manufatti quando si richiede costante lavorabilità. Il principale parametro responsabile della resistenza a compressione è il rapporto acqua/legante. Per un determinato cemento ed un determinato livello di cenere aggiunta, esisterebbe una distribuzione ottimale delle particelle, che indurrebbe un massimo di lavorabilità, un minimo rapporto acqua/legante ed una resistenza ottimale. Per ogni tipo di cemento e di cenere esisterebbe un livello ottimale di sostituzione di cemento, responsabile di una distribuzione ottimale di particelle e di una più favorevole lavorabilità e resistenza.

Seedat ed altri (24), al fine di migliorare le proprietà del calcestruzzo allo stato fresco ed a quello indurito, hanno proposto di impiegare, come valido sostituto del fumo di silice, una cenere volante ultrafine con oltre l'85% di particelle al di sotto di 10 μm . Lo sviluppo della resistenza iniziale risulta simile a quella di calcestruzzi con fumo di silice e, a periodi più lunghi, i valori sono addirittura più alti.

Arjunan ed altri (25) hanno seguito gli effetti della stagionatura a vapore (fino a 350°C) sull'attivazione delle ceneri volanti a basso contenuto di calcio. Hanno rilevato che la stagionatura a vapore favorisce lo sviluppo della resistenza meccanica durante il periodo iniziale del trattamento e sottolineato l'importanza dell'impiego di un dosaggio ottimale di NaOH (0.5%) nell'attivazione alcalina. Dopo un'ora di stagionatura a 350°C e 28 giorni d'idratazione, sono state rilevate come fasi principali: silicato di calcio, portlandite ed ettringite.

Zhang ed altri (26), al fine di accelerare la velocità di sviluppo dell'attività "pozzolanica", hanno miscelato una cenere volante ad alto contenuto di silice con reagenti chimici, quali: CaO, CaF_2 , Na_2CO_3 e la hanno trattata per 30 minuti a 950°C. Hanno quindi studiato le ricadute sulla composizione e sulla resistenza delle paste. Rilevano che l'aggiunzione di CaF_2 in ragione del 0.4% ad una cenere cui è stato aggiunto il 20% di CaO, può cambiarne la struttura dopo trattamento a 950°C, migliorare l'attività "pozzolanica" ed incrementare la resistenza della pasta. A parità di tempo d'idratazione, il grado d'idratazione della cenere termicamente trattata con CaF_2 aumenta ed il tenore di $\text{Ca}(\text{OH})_2$ nella pasta risulta minore di quello della pasta di cenere originaria.

Schneider ed altri (27) hanno sperimentato l'impiego delle ceneri volanti da lignite, corrispondenti secondo la Norma EN-197-1 alle ceneri volanti calcaree, nella produzione di cementi compositi. Esse possono esser utilizzate come costituenti principali del cemento se contengono almeno il 10% in peso di CaO reattivo. Se tale tenore non supera il 15% in peso, la cenere deve contenere almeno il 25% in peso di silice reattiva. Segnalano che il rimpiazzo di clinker con cenere volante calcarea, abbassa la resistenza a compressione del cemento, specie alle brevi stagionature. Una continua idratazione tende a compensare la perdita di resistenza, perché le particelle "pozzolaniche" contenute nelle ceneri, dotate di idraulicità latente, contribuiscono allo sviluppo della resistenza del cemento. Un'ulteriore riduzione della bassa resistenza iniziale può esser conseguita aumentando la finezza delle ceneri mediante macinazione. Per rimpiazzo di

clinker con cenere calcarea fino a livelli di sostituzione del 20% in peso, hanno ottenuto proprietà accettabili di comportamento del cemento.

Xiong ed altri (28) hanno studiato gli effetti di un prodotto per imprimitura, modificato con cenere volante, sulla microstruttura e sulla forza del legame all'interfaccia con il calcestruzzo da riparare. Hanno posto in luce che il prodotto rende la zona di transizione interfacciale più densa ed uniforme, determinando un notevole incremento della forza del legame, che si estrinseca in virtù di forze intermolecolari, collegamento meccanico e reazione chimica.

Siddique (29) ha sostituito l'aggregato fine (sabbia) del calcestruzzo con cinque livelli di rimpiazzo di ceneri volanti di classe F. Sostituendo la sabbia fine con il 50% in peso di cenere volante, ha registrato un notevole miglioramento della resistenza a compressione, a tutte le stagionature.

Siddique (30) ha anche sostituito il cemento con tre livelli di rimpiazzo di ceneri volanti di classe F, aggiungendo tre percentuali (0.25, 0.50, 0.75) di fibre di rafia (canapa di Calcutta). Ha ottenuto un aumento di lavorabilità, dovuto all' "effetto palla" delle particelle sferiche di cenere. La lavorabilità, però, si riduce con l'aggiunta di fibre di rafia, mentre aumenta la resistenza a trazione e flessione e, notevolmente, quella all'urto. Non ha notato effetti significativi sulla resistenza a compressione.

Siddique (31) ha pure valutato la resistenza all'abrasione di un calcestruzzo, adoperando quattro livelli di rimpiazzo di aggregato fine (10, 20, 30, 40%) con ceneri volanti di classe F. Ha rilevato che il fattore principale che governa la resistenza all'abrasione del calcestruzzo è la resistenza a compressione e che entrambe crescono al crescere del livello di rimpiazzo dell'aggregato fine da parte della cenere volante.

Siddique infine (7) ha rimpiazzato il cemento Portland con tre livelli di sostituzione di ceneri volanti di classe F (40, 45, 50%). Ha rilevato che l'impiego di queste percentuali di cenere abbassa la resistenza a compressione a 28 giorni del calcestruzzo, così come quella a trazione, a flessione, all'abrasione ed il modulo elastico. Tutte queste proprietà aumentano, però, in continuo a 91 e 365 giorni, in virtù dell'attività "pozzolanica" delle ceneri. Le ceneri volanti possono pertanto esser tranquillamente impiegate, fino a livelli di sostituzione del 50% di cemento, nel calcestruzzo armato ed in elementi prefabbricati.

Jaturapitakkul ed altri (32) hanno macinato la cenere volante grossolana, con diametro medio di 90-100 μm e scarsa attività "pozzolanica", portandola a 3.8 μm . La hanno impiegata per rimpiazzare il cemento Portland di tipo I, a livelli di sostituzione del 15, 25, 35, 50% in peso, per produrre calcestruzzi ad alta resistenza. A livelli di sostituzione del 25% di cemento hanno rilevato la resistenza a compressione più alta. Suggestiscono anche di rimpiazzare il fumo di silice condensato con ceneri grossolane, macinate ad alta finezza, nei calcestruzzi ad alta resistenza, con evidenti vantaggi economici.

Antiohos ed altri (33) hanno studiato le caratteristiche di comportamento tecnico di sistemi calce viva-ceneri volanti-cemento, impiegando due campioni

di ceneri, differenti per contenuto di silice attiva e di calcio. Hanno rilevato che, per i sistemi con ceneri ad alto contenuto di calcio, il dosaggio ottimale corrisponde ad un'aggiunta di calce viva del 3%, con aumento di resistenza alle brevi ed alle lunghe stagionature. Nel caso di ceneri più povere di calcio, una piccola quantità (5%) di calce viva si è rivelata efficace solo durante gli stadi iniziali del processo d'idratazione. Ipotizzano che la calce viva aggiunta, impegni completamente la silice disponibile nella formazione di C-S-H.

Li (34) ha evidenziato che l'incorporazione del 4% di nanosilice, agendo come additivo accelerante, determina un notevole incremento della resistenza a compressione, già dopo una stagionatura di tre giorni, unitamente ad un miglioramento della distribuzione dei pori, in calcestruzzi ad alta resistenza ed alto volume di ceneri.

Chindaprasirt ed altri (35) hanno studiato l'effetto delle ceneri volanti di differente finezza, sulla resistenza meccanica, sul ritiro per essiccazione e sulla resistenza ai solfati nelle miscele per malta. Hanno rilevato che l'incorporazione di ceneri fini riduce la richiesta d'acqua, a seguito della forma sferica e liscia delle superfici delle particelle. L'alta area superficiale delle ceneri fini, rendendole più reattive, aumenta la resistenza meccanica delle malte. In assenza di frazioni fini e medie, la frazione grossa delle ceneri aumenta invece la richiesta d'acqua, a causa della natura scabra delle superfici. Tutte le ceneri riducono il ritiro delle malte. L'incorporazione di tutte le ceneri nelle malte ne migliora la resistenza all'attacco per immersione in acido solforico. Le particelle più grosse, con superficie scabra, occupando un volume maggiore, riducono quello di cemento Portland ordinario, determinando una migliore resistenza all'attacco da parte dell'acido.

Potha Raju ed altri (36), in vista dell'estensione dell'impiego del calcestruzzo anche ad applicazioni speciali che devono sopportare temperature più alte, hanno sperimentato il comportamento a flessione del calcestruzzo con ceneri volanti nell'intervallo di temperatura 100-250°C. Hanno rilevato un miglior comportamento del calcestruzzo recante cenere volante di classe F, a livelli di sostituzione fino al 20%, rispetto a quello privo di cenere. Le perdite di resistenza registrate per tutte le miscele senza ceneri sono risultate comprese fra 10 e 39%, mentre per quelle con 10 o 20% di cenere, fra il 4 ed il 31%. Entro la prima ora di esposizione a temperatura si è registrato il grosso di perdita di resistenza per tutte le miscele.

Wang ed altri (37) hanno studiato, nel sistema cemento-cenere volante, lo stadio di sviluppo dell'idratazione del clinker e quello della reazione pozzolanica. Hanno rilevato che il grado d'idratazione del cemento cresce al crescere del contenuto di cenere, mentre si riduce quello della reazione pozzolanica prodotta dalla cenere. L'effetto attivante della cenere viene attribuito sia all'attività della cenere stessa, sia alla funzione di promozione che esplica sull'idratazione del cemento. Un contenuto 0-60% rende più marcato l'effetto attivante della cenere.

Al crescere del contenuto di cenere si riduce il grado d'idratazione totale del sistema, poiché l'attività della cenere risulta inferiore a quella del cemento.

Gli stessi (38) hanno rilevato che, benchè le ceneri volanti non reagiscano completamente con l'idrossido di calcio, pur tuttavia svolgono una funzione estremamente importante: l'effetto "microaggregato". Esso si rafforza con il contenuto di cenere e si indebolisce con il passare del tempo.

Con riferimento all'influenza delle ceneri sulla distribuzione delle dimensioni dei pori, rilevano che, alle brevi stagionature, le ceneri non affinano la struttura dei pori. Il contrario, a tempi più lunghi.

Conclusioni

Le ricerche sperimentali più recentemente condotte, delle quali ho richiamato i risultati essenziali, considerevolmente accrescono le conoscenze, già notevoli, sul comportamento tecnico dei cementi compositi, preparati per rimpiazzo parziale di clinker di Portland con ceneri volanti ricche di silicio, dotate di attività "pozzolanica", od aggiunte direttamente alle miscele per calcestruzzo. Del pari studiate risultano quelle ad alto contenuto di calcio, dotate di proprietà cementanti.

Sono stati infatti approfonditi una pluralità di aspetti della morfologia, della mineralogia e della composizione chimica delle ceneri volanti e posti in luce gli effetti che determinano sulla lavorabilità degli impasti, sulla riduzione della richiesta d'acqua, con ricadute sulla resistenza meccanica e sul ritiro, sulla stabilità di volume e sulla velocità di espansione.

Sono state suggerite metodologie di attivazione delle ceneri, idonee a superare la lentezza dell'idratazione iniziale degli impasti cementizi, proposte modalità di perfezionamento della "pozzolanicità" delle ceneri, constatati i miglioramenti del comportamento che inducono nei manufatti, compresa la diminuzione delle perdite di resistenza dei calcestruzzi esposti a temperatura.

Dall'esame complessivo dei risultati risalta che le caratteristiche mineralogiche e granulometriche delle ceneri volanti giuocano un ruolo determinante sul comportamento tecnico delle miscele.

La natura dell'aggiunta attiva impiegata non è tanto importante, quanto, invece, le dimensioni delle particelle e la reattività delle fasi non cristalline e cristalline nel corso dell'idratazione.

A parte alcune immancabili divergenze di opinioni, che oserei definire "fisiologiche", perché dovute alla provenienza, alla natura, alla composizione, alle caratteristiche mineralogiche e morfologiche delle ceneri impiegate dai differenti sperimentatori, la messe dei risultati raccolti converge nell'indicare che, attenendosi scrupolosamente alle disposizioni delle Normative in vigore (4), si possono individuare le vie di superamento di qualche handicap, indotto dalla presenza di ceneri volanti in seno al cemento e testimonia che esistono tutte le

premesse perché il volume totale di ceneri volanti, prodotte nelle centrali termiche del mondo, possa trovare più largo impiego nell'industria cementiera.

Bibliografia

- (1) Lee S.H., Sakai E., Daimon M. Characterization of fly ashes directly collected from electrostatic precipitator. Proc. 10th ICCI, 3ii 088. Gothenburg (1997).
- (2) Concrete Technology and Design, Vol. 3. Cement replacement materials. Swamy Ed. Surrey Univ. Press (1986).
- (3) Pandey S.P., Sharma R.L., Mineral additions in ordinary Portland cement. In: Advances in Cement Technology. Second Ed. S.N. Ghosh Ed. 245-292. Tech. Books Int. New Dehli (2002).
- (4) Specification for fly ash and raw or calcined natural pozzolan for use as a mineral admixture in Portland cement concrete. C618.78. Amer. Soc. Test. Mat. 362-365 Philadelphia (1980). ASTM C 595-1989. Consiglio Nazionale delle Ricerche. Guida all'impiego dei Cementi. Roma (1996).
- (5) Dordi C.M. Concrete for the millennium. In: Advances in Cement Tehnology. Second Ed.S.N. Ghosh Ed. 421-454. Tech. Books Int. New Dehli (2002).
- (6) Jiang L., Liu Z., Ye Y. Durability of concrete incorporating large volumes of low-quality fly ash. Cement Concr. Res. 34,8.1467-1469 (2004).
- (7) Siddique R. Performance characteristics of high-volume class F fly ash concrete. Cement Concr. Res.,34,3,487-493 (2004).
- (8) Bellmann F., Moser B., Stark J. The pozzolanic reaction of coal fly ash and its effects on the sulfate resistance of concrete. Zement-Kalk-Gips Int.,56,10, 71-77 (2003).
- (9) Sersale R.Le aggiunte minerali al cemento Portland ordinario e le modificazioni del suo comportamento tecnico. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli ,70, 97-109 (2003).
- (10) Dietz S., Miskiewicz K., Schmidt M. Properties of cement containing German lignite fly ashes. Proc. 10th ICCI, 3ii 087. Gothenburg (1997).
- (11) Katz A. Fly-ash blended cement activated by a strong base. Proc. 10th ICCI, 3ii 083. Gothenburg (1997).
- (12) Hardtl R. The pozzolanic reaction of fly ash in connection with different types of cement. Proc. 10th ICCI, 3ii 082. Gothenburg (1997).
- (13) Temiz H., Karakeci A. Y. An investigation on microstructure of cement paste containing fly ash and silica fume. Cement Concr. Res.,32, 7, 1131-1132 (2002).
- (14) Fu X.,Wang Z., Tao W., Yang C., Hou W., Dong Y.,Wu X. Studies on blended cement with large amount of fly ash. Cement Concr. Res., 32, 7, 1153-1159 (2002).
- (15) Langan B.W., Weng K., Ward M.A. Effect of silica fume and fly ash on heat of hydration of Portland cement. Cement Concr. Res., 32, 7, 1045-1051 (2002).

- (16) Shehata M.H., Thomas D.A. Use of ternary blends containing silica fume and fly ash to suppress expansion due to alkali-silica reaction in concrete. *Cement Concr. Res.* 32,3,341-349 (2002).
- (17) Lee C. Y., Lee H. K., Lee K.M. Strength and microstructural characteristics of chemically activated fly-ash cement systems. *Cement Concr. Res.*, 33, 3. 425-431 (2003).
- (18) Kobayakawa M., Hanehara S., Hwang K., Tomosawa F. Pozzolanic reaction of fly ash cement system. *Proc. 11th ICC*C, 2, 736-746. Durban (2003).
- (19) Giergiczny Z. Effect of silica fume admixture on the properties of fly ash cements. *Proc. 11th ICC*C, 2, 801-809, Durban (2003).
- (20) Wang A., Zhang C., Sun W. Fly ash effects.1. The morphological effect of fly ash. *Cement Concr. Res.*,33,12, 2023-2029, (2003).
- (21) Singh N. B., Chaturvedi S., Rai S. Hydration of fly ash blended Portland cement in the presence of superplasticizers at different temperatures. *Proc. 11th ICC*C, 2, 590-595. Durban (2003).
- (22) Antiohos S., Papadakis V. G., Maganari K., Tsimas S. The development of blended supplementary cementing materials consisting of high and low calcium fly ashes. *Proc. 11th ICC*C, 2, 747-755. Durban (2003).
- (23) Pretorius J.H.C., Kearsley E.P. The influence of high volumes of PFA on the workability of pastes. *Proc. 11th ICC*C,2,758-767. Durban (2003).
- (24) Seedat E.Y., Kruger R.A. An ultra fine pozzolanic class F fly ash for superior concrete. *Proc. 11th ICC*C, 2, 780-790. Durban (2003).
- (25) Arjunan P., Silsbee M.R., Roy D.M. Combined effect of chemical, mechanical and thermal activation of low calcium fly ash. *Proc. 11th ICC*C, 2, 951-957. Durban (2003).
- (26) Zhang W., He X., Zhang H., Li Y., Chen Y. Study on the phase compositions and pozzolanic activity of heat-treated fly ash. *Proc. 11th ICC*C, 2, 971-976, Durban (2003).
- (27) Schneider M., Puntke S.,Schneider C., Muller C. Use and reactivity of cement main constituents in Germany.*Proc.11th ICC*C 2, 978-987. Durban (2003).
- (28) Xiong G., Liu J., Li G., Xie X. A way for improving interfacial transition zone between concrete substrate and repair materials. *Cement Concr. Res.*,32, 12, 1877-1881 (2002).
- (29) Siddique R. Effect of fine aggregate replacement with class F fly ash on the mechanical properties of concrete. *Cement Concr. Res.*, 33, 4, 539-547 (2003).
- (30) Siddique R. Properties of concrete incorporating high volumes of class F fly ash and san fibers. *Cement Concr. Res.*, 34,1. 37-42 (2004).
- (31) Siddique R. Effect of fine aggregate replacement with class F fly ash on the abrasion resistance of concrete. *Cement Concr. Res.*, 33, 11, 1877-1881 (2003).
- (32) Jaturapitakkul C., Kiattikomol K., Sata V., Leekeeratikul J. Use of ground coarse fly ash as a replacement of condensed silica fume in producing high-strength concrete. *Cement Concr. Res.*,34, 4, 549-555 (2004).

- (33) Antiohos S., Tsimas S. Activation of fly ash cementitious systems in the presence of quicklime. Part I. Compressive strength and pozzolanic reaction rate. *Cement Concr. Res.* 34, 5, 769-779 (2004).
- (34) Li G. Properties of high-volume fly ash concrete incorporating nano-SiO₂. *Cement Concr. Res.*, 34, 6, 1043-1049 (2004).
- (35) Chindaprasirt P., Homwuttiwong S., Sirivivatnanon V. Influence of fly ash fineness on strength, drying shrinkage and sulfate resistance of blended cement mortar. *Cement Concr. Res.*, 34, 7, 1087-1092 (2004).
- (36) Raju Potha M., Shobha M., Rambabu K. Flexural strength of fly ash concrete under elevated temperature. *Magazine of Concrete Res.*, 56,2, 83-88 (2004).
- (37) Wang A., Zhang C., Sun W. Fly ash effects. II. The active effect of fly ash. *Cement Concr. Res.*, 34,11, 2057-2060, (2004).
- (38) Wang A., Zhang C., Sun W. Fly ash effects. III. The micro-aggregate effect of fly ash. *Cement Concr. Res.*, 34, 11, 2061-2066 (2004).

Some convergence problems

Nota di Michelangelo Bucci¹

Presentata dal Socio Carlo Sbordone
 (Adunanza del 3 dicembre 2004)

Abstract

In [1] the expression of the 2×2 symmetric matrix $\mathcal{A}$ with determinant 1 transforming a given vector E into another given vector B is stated and a suitable continuity property of the map $(E, B) \rightarrow \mathcal{A}$ is established in term of G-convergence. Here we prove that the conformal orientation preserving matrix $\mathcal{A}^+$ associated to E and B does not enjoy such a continuity property.

1 Introduction

Throughout the present paper we identify a linear map $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with its 2×2 matrix $A = (a_{ij})$ relative to the standard basis in $\mathbb{R}^2$. We supply the space $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ of all such matrices with the inner product $\langle A, D \rangle = \text{Tr}(A^t D)$ and the induced Hilbert-Schmidt norm $\|A\| = \langle A, A \rangle^{\frac{1}{2}}$. Most of the time, however, we will use the operator norm

$$|A| = \max\{|Ah| : |h| = 1\}$$

We reserve the notation $\mathbb{R}_+^{2 \times 2}$ (resp. $\mathbb{R}_-^{2 \times 2}$) for the set of matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ with $\det A \geq 0$ (resp. with $\det A \leq 0$). Let $O(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^t A = I\}$ denote the orthogonal group of $\mathbb{R}^2$. The set of conformal matrices is then defined as

$$CO(2) = \{\gamma A : A \in O(2), \gamma \in \mathbb{R}\}$$

It represents two classes of linear conformal mappings: the orientation preserving

$$CO_+(2) = CO(2) \cap \mathbb{R}_+^{2 \times 2}$$

and the orientation reversing

$$CO_-(2) = CO(2) \cap \mathbb{R}_-^{2 \times 2}$$

¹bucci@studenti.unina.it

By mean of Hadamard's inequality we can characterize these classes by the following equations:

$$\begin{aligned} CO_+(2) : |A|^2 &= \det A \\ CO_-(2) : |A|^2 &= -\det A \end{aligned}$$

If $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ the conformal and anticonformal parts of A are defined as

$$A^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{12} - a_{21} \\ a_{21} - a_{12} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$$

and

$$A^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{12} + a_{21} \\ a_{12} + a_{21} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

respectively. In this way we obtain an orthogonal decomposition

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = CO_+(2) \oplus CO_-(2)$$

It is worth noting that

$$CO_+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

and

$$CO_-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} : \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Another important class of matrices is the set $S(2)$ of positive definite symmetric 2×2 matrices with determinant equal to 1.

In [1] the following theorem is proved (see also [3])

Theorem 1. *For given vectors $E, B \in \mathbb{R}^2$ such that $\langle E, B \rangle > 0$ there exist a unique matrix $A \in S(2)$ such that*

$$AE = B$$

Moreover, if for a $K \geq 1$ the distortion inequality

$$|E|^2 + |B|^2 \leq \left(K + \frac{1}{K} \right) \langle E, B \rangle$$

holds, then we have

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq K |\xi|^2$$

for any $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Our aim is to prove that other choices are possible of matrices mapping E into B , if we change the prescriptions. Namely we will make use of matrices belonging to $CO_+(2)$ or to $CO_-(2)$. We have the following

Theorem 2. *For any given vectors $E, B \in \mathbb{R}^2$ such that $|E| > 0$, there exists a unique matrix $A \in CO_+(2)$ such that*

$$A^+ E = B$$

Moreover if $m, M > 0$ verify

$$m|E|^2 \leq \langle E, B \rangle \quad |B| \leq M|E|$$

then we have

$$\begin{cases} m|\xi|^2 \leq \langle A^+ \xi, \xi \rangle \\ |A^+ \xi| \leq M|\xi| \end{cases} \quad (1.1)$$

for any $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Finally, the $CO_-(2)$ version of the theorem states as follows:

Theorem 3. *For any given vectors $E, B \in \mathbb{R}^2$ such that $|E| > 0$, there exists a unique matrix $A^- \in CO_-(2)$ such that*

$$A^- E = B$$

Moreover if $M > 0$ verifies

$$|B| \leq M|E|$$

then we have

$$|A^+ \xi| \leq M|\xi|$$

for any $\xi \in \mathbb{R}^2$.

In the following we will denote

$$A = A[E, B], \quad A^+ = A^+[E, B] \quad A^- = A^-[E, B]$$

the matrices introduced in Theorems 1, 2 and 3.

We are also interested in variable vectors $E(x), B(x)$ for a.e. $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. If $E(x), B(x)$ are measurable then also

$$A(x) = A[E(x), B(x)] \quad \bar{A}^+(x) = \bar{A}^+[E(x), B(x)]$$

are measurable.

We are particularly concerned with the continuity properties of the operators

$$\mathcal{T} : (E, B) \in [L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)]^2 \rightarrow \mathcal{A}[E, B]$$

$$\mathcal{T}^+ : (E, B) \in [L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)]^2 \rightarrow \mathcal{A}^+[E, B]$$

when $[L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)]^2$ is equipped with the weak topology. If we restrict the domain of $\mathcal{T}$ to the set of K-quasiharmonic fields (E, B) defined by the distortion inequality

$$|E(x)|^2 + |B(x)|^2 \leq \left(K + \frac{1}{K}\right) \langle E(x), B(x) \rangle$$

and $\operatorname{curl} E(x) = 0$, $\operatorname{div} B(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$, the range of $\mathcal{T}$ consists of the set $\mathcal{E}_1(K)$ of matrices $A(x) = A^t(x)$ with $\det A(x) = 1$ and

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq K |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

In [1] the operator $\mathcal{T}$ is seen to be continuous when $\mathcal{E}_1(K)$ is equipped with the topology of the G-convergence. Here we prove that $\mathcal{T}^+$ does not enjoy the same continuity properties. See section 2 for the definition of G-convergence and section 4 for the counterexample to continuity.

2 Preliminary results

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^2$, $K \geq 1$ be a constant and $A = (a_{ij})$ be a measurable 2×2 -matrix valued function defined on Ω satisfying $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ and

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq K |\xi|^2, \det A(x) = 1 \quad (2.1)$$

for a.e. $x \in \Omega$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^2$. We denote by $\mathcal{E}_1(K)$ the set of such functions $A = A(x)$. Inequality 2.1 can be rephrased as

$$|A\xi|^2 + |\xi|^2 \leq \left(K + \frac{1}{K}\right) \langle A\xi, \xi \rangle \quad (2.2)$$

For each matrix $A \in \mathcal{E}_1(K)$, we can consider the elliptic differential operator

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} D_i(a_{ij} D_j)$$

With abuse of notation, we shall say that $\mathbf{A}$ belongs to $\mathcal{E}_1(K)$. Being Ω bounded, $\mathbf{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ is an isomorphism. In this section we study G-convergence of operators in $\mathcal{E}_1(K)$. Let $\mathbf{A}_h = \sum_{ij} D_i a_{ij}^h D_j \in \mathcal{E}_1(K)$, $h \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1(K)$; we say that $\{\mathbf{A}_h\}$ G-converges to $\mathbf{A}$ and we write $\mathbf{A}_h \xrightarrow{G} \mathbf{A}$ (or even $A_h \xrightarrow{G} A$) if for all $F \in H^{-1}(\Omega)$ we have $\mathbf{A}_h^{-1} F \rightharpoonup \mathbf{A}^{-1} F$ weakly in $H_0^1(\Omega)$, that is, if u_h and u are respectively the solutions of the Dirichlet problems

$$\begin{cases} \sum_{ij} D_i(a_{ij}^h D_j u_h) = F \\ u_h \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{ij} D_i(a_{ij} D_j u) = F \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

then $u_h \rightharpoonup u$ weakly in $H_0^1(\Omega)$.

The notion of G-convergence was introduced by Spagnolo [9]. Here we only mention some fundamental facts (see also [4]).

First, we recall the compactness of $\mathcal{E}_1(K)$ with respect to the G-convergence: given a sequence $\{\mathbf{A}_h\}$ of operators of $\mathcal{E}_1(K)$, there exists an operator $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1(K)$ and a subsequence $\{\mathbf{A}_{h_k}\}$ G-converging to $\mathbf{A}$. We also recall that G-convergence is weaker than L_{loc}^1 -convergence of the coefficient matrices, and is not comparable with the $\sigma(L^\infty, L^1)$ weak convergence of the coefficient matrices. In this context, the result of [5] is illuminating: every operator $\mathbf{A}$ is the G-limit of a sequence of isotropic operators $\mathbf{B}_h = \sum_i D_i(\beta_h D_i)$. We conclude our summing up the properties of G-convergence by recalling that for every $F \in H^{-1}(\Omega)$, together with the convergence of the solutions u_h, u , we have also convergence of the moments and of the densities: $\sum_{ij} a_{ij}^h D_j u_h \rightharpoonup \sum_{ij} a_{ij} D_j u$ weakly in $L^2(\Omega)$ and $\sum_{ij} a_{ij}^h D_i u_h D_j u_h \rightharpoonup \sum_{ij} a_{ij} D_i u D_j u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3 The $CO_+(2)$ and $CO_-(2)$ cases

Before examining the proofs of theorems 2 and 3 it will be useful to write the explicit expression of the matrix $\mathcal{A}$ named in theorem 1. Namely if $B = (B_1, B_2)^t$ and $E = (E_1, E_2)$ then

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{B_1^2 + E_2^2}{\langle B, E \rangle} & \frac{B_1 B_2 - E_1 E_2}{\langle B, E \rangle} \\ \frac{B_1 B_2 - E_1 E_2}{\langle B, E \rangle} & \frac{B_2^2 + E_1^2}{\langle B, E \rangle} \end{pmatrix}$$

Moreover, let us recall that in $\mathbb{R}^{n \times n}$ the following characterization of the ellipticity condition holds:

Theorem 4. Let A be in $\mathbb{R}^{n \times n}$, symmetric and $K > 1$. Then the following are equivalent:

- $|A\xi|^2 + |\xi|^2 \leq (K + \frac{1}{K}) \langle A\xi, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
- $\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq K |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Proof. As A is symmetric, it is possible to find an orthonormal basis such that we have

$$A\xi = (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) \quad \langle A\xi, \xi \rangle = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

being $x_1, \dots, x_n$ the components of ξ in with respect to the new basis and $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ the eigenvalues of A . Our aim is, so, proving the equivalence of

1. $\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{K} \leq \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \leq K(x_1^2 + \dots + x_n^2)$
2. $\alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (K + \frac{1}{K})(\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2)$

without loss of generality we can assume $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Let $\alpha_1, \alpha_n \in [\frac{1}{K}, K]$. Then

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}(x_1^2 + \dots + x_n^2) &\leq \alpha_1(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq \\ &\leq \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \leq \\ &\leq \alpha_n(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq K(x_1^2 + \dots + x_n^2) \end{aligned}$$

and so 1 holds. Let us consider $X = (1, 0, \dots, 0)$ we have $|X| = 1$ and $\langle AX, X \rangle = \alpha_1$. If $\alpha_1 < \frac{1}{K}$ (resp. $> K$) we obtain $\langle AX, X \rangle < \frac{|X|}{K}$ (resp. $> K|X|$). so if $\alpha_1 \notin [\frac{1}{K}, K]$ 1. does not hold. Same reasoning can be done for α_n and we obtain that 1. holds if and only if $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [\frac{1}{K}, K]$. With simple computation it can be obtained that (2) is equivalent to

$$\sum_{i=1}^n (K\alpha_i^2 - (K^2 + 1)\alpha_i + K)x_i^2 \leq 0$$

As this must be verified by all $\xi \in \mathbb{R}^n$, the matrix

$$\Lambda = \{(K\alpha_i^2 - (K^2 + 1)\alpha_i + K)\delta_{ij}\}$$

must be negative semidefinite and this, being Λ diagonal, is true if and only if $\forall i = 1, \dots, n$

$$K\alpha_i^2 - (K^2 + 1)\alpha_i + K \leq 0$$

Solving the inequalities we have that 2. holds if and only if

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \left[\frac{1}{K}, K\right]$$

□

Let us now proceed with the proof of Theorem 2

Proof of Theorem 2. For given vectors $E = (E_1, E_2), B = (B_1, B_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $|E| > 0$ define the associated conformal, orientation preserving mapping

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+(E, B) = \frac{1}{|E|^2} \begin{pmatrix} \langle E, B \rangle & E_2 B_1 - E_1 B_2 \\ E_1 B_2 - E_2 B_1 & \langle E, B \rangle \end{pmatrix}$$

it is easy to check that

$$\mathcal{A}^+ E = B \quad (3.1)$$

Moreover $\mathcal{A}^+$ is the unique matrix in $CO_+(2)$ such that (3.1) holds. In fact, if $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are such that

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

since $|E| > 0$ the system

$$\begin{cases} (\alpha - \gamma)E_1 + (\beta - \delta)E_2 = 0 \\ (\delta - \beta)E_1 + (\alpha - \gamma)E_2 = 0 \end{cases}$$

has a nontrivial solution and then obviously $\alpha = \gamma$ and $\beta = \delta$. Finally, considering the explicit expression of $\mathcal{A}^+$ already given, it's easily checked that $\langle \mathcal{A}^+ \xi, \xi \rangle = \frac{\langle B, E \rangle}{|E|^2} |\xi|^2$ and $|\mathcal{A}^+ \xi| = \frac{|B|}{|E|} |\xi|$ from which the statement follows. □

The proof of theorem 3 is indeed very similar and we get explicitly

$$\mathcal{A}^- = \mathcal{A}^-(E, B) = \frac{1}{|E|^2} \begin{pmatrix} E_1 B_1 - E_2 B_2 & E_1 B_2 + E_2 B_1 \\ E_1 B_2 + E_2 B_1 & E_2 B_2 - E_1 B_1 \end{pmatrix}$$

Let us prove that

$$|\mathcal{A}^- \xi| = \frac{|B|}{|E|} |\xi| \quad (3.2)$$

For a generic matrix and a generic $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ in $CO_-(2)$ we have

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right| &= |(\gamma\xi_1 + \delta\xi_2, \delta\xi_1 - \gamma\xi_2)| \\ &= \sqrt{\gamma^2\xi_1^2 + \delta\xi_2^2 + 2\gamma\delta\xi_1\xi_2 + \delta^2\xi_1^2 + \gamma^2\xi_2^2 - 2\gamma\delta\xi_1\xi_2} \\ &= \sqrt{\gamma^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \delta^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} |\xi| \end{aligned}$$

In our case

$$\gamma = \frac{E_1B_1 - E_2B_2}{|E|^2} \quad \delta = \frac{E_1B_2 + E_2B_1}{|E|^2}$$

and so

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} &= \sqrt{\frac{E_1^2B_1^2 + E_2^2B_2^2 - 2E_1E_2B_1B_2 + E_1^2B_2^2 + E_2^2B_1^2 + 2E_1E_2B_1B_2}{|E|^4}} \\ &= \frac{1}{|E|^2} \sqrt{(E_1^2 + E_2^2)(B_1^2 + B_2^2)} = \frac{|E||B|}{|E|^2} \end{aligned}$$

from which follows the (3.2) It is worth observing that for $\mathcal{A}^- \in CO_-(2)$, the condition

$$m|\xi|^2 \leq \langle \mathcal{A}^-\xi, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

cannot hold in general for $m > 0$. If

$$\mathcal{A}^- = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \quad X = \left(1, \frac{\delta}{\gamma} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \right)$$

we obtain

$$\mathcal{A}^-X = \left(\gamma + \delta \left(\frac{\delta}{\gamma} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \right), \delta - \delta - \gamma \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \right)$$

from which we have

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^-X, X \rangle &= \gamma + \delta \left(\frac{\delta}{\gamma} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \right) - \gamma \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \left(\frac{\delta}{\gamma} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} \right) \\ &= \gamma + \frac{\delta^2}{\gamma} + \delta \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} - \delta \sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} + 1} - \gamma \left(\frac{\delta^2}{\gamma^2} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Finally, if $\gamma = 0$ it is straightforward that

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \delta)$$

and so, if $X = (1, 0)$ we have again

$$\langle \mathcal{A}^- X, X \rangle = 0$$

4 The counterexample

In this section we will construct a sequence of vector fields (E^j, B^j) with $\operatorname{div} B^j = 0$, $\operatorname{curl} E^j = 0$ such that $(E^j, B^j) \rightharpoonup (E, B)$ in $\sigma(L^2(\Omega; \mathbb{R}^2), L^2(\Omega; \mathbb{R}^2))$ and verifying uniformly the conditions

$$m |E^j|^2 \leq \langle E^j, B^j \rangle \quad (4.1)$$

$$|B^j| \leq M |E^j| \quad (4.2)$$

for certain $m, M > 0$, while the corresponding matrices $\mathcal{A}_j^+ = \mathcal{A}^+(E^j, B^j)$ do not G-converge to

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+(E, B)$$

Let

$$\beta_j(t) = \beta \frac{\sin jt}{|\sin jt|} \quad (4.3)$$

then $\beta_j(t) \rightharpoonup \beta$ in $\sigma(L^\infty, L^1)$ and $\beta_j(t)^2 = \beta^2$. Consider the vector fields in $\mathbb{R}^2$

$$E_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_j = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_j(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Let us prove the following

Theorem 5. *Let Ω be a cube in $\mathbb{R}^2$. Let β_j be defined by (4.3) and choose $E^j(x, y)$ and $B^j(x, y)$ as in (4.4) for $(x, y) \in \Omega$. Then*

$$(E^j, B^j) \rightharpoonup (E, B) \quad (4.5)$$

weakly in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ where

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

while

$$\mathcal{A}^+(E^j, B^j) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta_j(x) \\ \beta_j(x) & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

and $\mathcal{A}^+(E, B) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Proof. Fix $f \in L^2(\Omega)$, Ω a cube in $\mathbb{R}^2$ and denote by u_j the solution to the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathcal{A}_j^*}[u_j] = f \\ u_j \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \quad (4.6)$$

where

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j^*} = \operatorname{div}(\mathcal{A}_j^+ \nabla)$$

In particular, to precise notation $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} - \beta_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) = f \quad (4.7)$$

Set

$$v_j = \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} - \beta_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$w_j = \frac{\partial u_j}{\partial y} \quad (4.9)$$

and note that u_j, w_j are solutions to the following equations in Ω

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_j}[v_j] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta_j(x)} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_j(x)}{\alpha^2 + \beta_j(x)} f \right) \quad (4.10)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_j^+}[w_j] = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.11)$$

where

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_j} = \operatorname{div}(\mathcal{C}_j \nabla) \quad (4.12)$$

and

$$\mathcal{C}_j = \frac{{}^t \mathcal{A}^+}{\det A_j^+} \quad (4.13)$$

See [6]. Note that our assumption imply that

$$\alpha |E^j|^2 \leq \langle E^j, B^j \rangle \quad (4.14)$$

$$|B^j| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} |E^j| \quad (4.15)$$

It is straightforward checking that the coefficient matrix of the elliptic operators appearing in (4.10), (4.11) verify uniformly conditions of the type (1.1). Therefore, up to a subsequence, we can suppose that

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \quad \text{weakly in } L^2(\Omega) \\ v_j &\rightarrow v \quad \text{strongly in } L^2(\Omega) \\ w_j &\rightarrow w \quad \text{strongly in } L^2(\Omega) \end{aligned} \quad (4.16)$$

and also that

$$z_j = \beta_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial y} \rightharpoonup z \quad \text{weakly in } L^2(\Omega) \quad (4.17)$$

Now we want to identify v and z as follows:

$$v = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \quad z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.18)$$

Since $\beta_j \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(\Omega)$ and $\frac{\partial u_j}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}$ strongly in $L^2(\Omega)$ we have the first relation in (4.18). Now, using $\beta_j^2 = \beta^2$, we write

$$\begin{aligned} \beta_j \frac{v_j}{\alpha} &= \left(\beta_j \frac{\partial u_j}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial y} - \frac{\beta_j(x)^2}{\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial y} \\ &= z_j - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.19)$$

and pass to the limit, first on the left hand side:

$$\frac{\beta_j v_j}{\alpha} \rightharpoonup 0 \quad (4.20)$$

and then on the right hand side of (4.19):

$$z - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial y} \rightharpoonup z - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.21)$$

By (4.19), (4.20), (4.21) we deduce immediatly the second relation in (4.18)

$$z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial y}$$

By a compactness argument we can get rid of the subsequences and the theorem is proved. $\square$

References

- [1] C. Capone. Quasiharmonic fields and Beltrami operators. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 42:363–377, 2002.
- [2] L. D’Onofrio and L. Greco. A counter-example in G-convergence of non-diverge elliptic operators. *Proc. Royal Society of Edinburgh*, 133A:1299–1910, 2003.
- [3] T Iwaniec and C. Sbordone. Quasiharmonic fields. *Analyse Non Linéaire*, 18:519–572, 2001.
- [4] P. Marcellini. Convergence of second order linear elliptic operators. *Bollettino U.M.I.*, 16-B:278–290, 1979.
- [5] A. Marino and S. Spagnolo. Un tipo di approssimazione dell’operatore $\sum_{ij} D_i(a_{ij}D_j)$ con operatori $\sum_j D_j(\beta D_j)$. *Ann. Scuola Norm. Sup Pisa*, 23:657–673, 1969.
- [6] F. Murat and C. Sbordone. Fortuitous relations between some elliptic equations. *Asymptotic analysis*, 34:241–259, 2003.
- [7] C. Sbordone. Elliptic equations and quasiconformal mappings. (*to appear*).
- [8] C. Sbordone. Alcune questioni di convergenza per operatori differenziali del 2° ordine. *Bollettino U.M.I.*, 10:672–682, 1974.
- [9] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Scuola Norm. Sup Pisa*, 22:391–397, 1968.

Stability properties for Neumann boundary value problem in nonlinear diffusion

Nota di S. Rionero¹ e M. Vitiello^{2*}

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero
(Adunanza del 3 Dicembre 2004)

Abstract: The longtime behaviour of the solutions to the nonlinear diffusion equation $u_t = \Delta F(u)$ in bounded domains, under Neumann boundary data, is studied. The diffusion model for studying insect and animal dispersal with diffusion coefficient depending on the population density, is considered.

Riassunto - Viene studiato l'andamento asintotico delle soluzioni dell'equazione di diffusione non lineare $u_t = \Delta F(u)$ in domini limitati, con condizioni al bordo di tipo Neumann. I risultati ottenuti sono applicati alla diffusione non lineare di una popolazione di insetti con coefficiente di diffusione funzione pari della densità.

1 Introduction

As it well known the nonlinear diffusion equation

$$(1) \quad u_t = \Delta F(u),$$

with $u = u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, in the past as nowadays, has attracted the attention of many writers. This is because several phenomena can be

¹Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Napoli.

²Politecnico di Bari, II Facoltà di Ingegneria, Taranto, (e-mail:vitiello@dm.uniba.it).

described by (1) [[5]-[9]-[14]]. Recently, under Dirichlet and Neumann boundary data, several results of stability have been obtained in [[1]-[8]]. Precisely, in the case of Dirichlet boundary data, conditions of stability of steady states have been obtained in [[1]-[5]] when Ω is bounded and in [[6]-[8]] when Ω is unbounded. The Neumann boundary data, with F odd function, has been considered extensively in [4]. In particular the stability of the constant solution

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, 0) d\Omega$$

has been studied.

In the present paper we reconsider the problem studied in [4], without requiring the oddness of F . The plane of the paper is the following one. After some preliminaries (Section 2), in Section 3 via the Liapunov direct method we perform the linear stability analysis with respect any perturbation and following the procedure used in [13] we obtain the linear asymptotic stability in a suitable weak sense. In Section 4 we study the nonlinear asymptotic exponential stability with respect to perturbations with zero average at each instant. For this perturbations, in Section 5 we obtain a pointwise stability result in a suitable weak sense. Finally, in Section 6, we apply the results obtained to the case of the diffusion model for studying the insect and animal dispersal, allowing to the diffusion coefficient to be even function of the density.

2 Preliminaries

Let us consider the initial boundary value problem (i.b.v.p.)

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = \Delta F(u), & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{du}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in R^+, \end{cases}$$

where $F \in C^2(R)$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ are assigned functions, and $\mathbf{n}$ denotes the unit outward normal to $\partial\Omega$. The associated steady boundary value problem (b.v.p.) is given by

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta F(U) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{dU}{d\mathbf{n}} = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Obviously for any constant U system (3) is satisfied. Viceversa, by using the energy method and the maximum principle, it has been shown in [10], that the smooth solutions of (3) exist only for

$$F = \text{constant}.$$

Let u be a smooth solution of (2) and let us consider the spatial average

$$(4) \quad \bar{u}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) d\Omega.$$

It is easily seen that $\bar{u}$ is constant. In fact integrating equation (2)₁ and using the divergence theorem we have

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla F \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_{\partial\Omega} F'(u) \nabla u \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0$$

that implies

$$\bar{u}(t) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, 0) d\Omega = \bar{u}_0.$$

Our aim is to study the stability of $\bar{u}_0$. Setting

$$\begin{cases} v = u - U \\ U = \bar{u}_0 \end{cases}$$

from (2)-(3) it follows that

$$(5) \quad \begin{cases} v_t = \Delta F(U + v) - \Delta F(U), & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{dv}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in R^+. \end{cases}$$

We observe that, by means of the same procedure used for u , it can be shown that

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v(x, t) d\Omega = \bar{v}_0.$$

Therefore $\bar{v}_0 = 0 \Rightarrow \bar{v}(t) = 0, \quad \forall t > 0$.

In the sequel we will denote by $H_*^1(\Omega)$ the Sobolev space such that

$$(6) \quad \psi \in H_*^1(\Omega) \rightarrow \left\{ \psi^2 + (\nabla \psi)^2 \in L^2(\Omega), \frac{dv}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ on } \partial\Omega, \bar{\psi} = \int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \right\}$$

and recall that in $H_*^1(\Omega)$ the Poincaré inequality holds [11]-[9]

$$(7) \quad \alpha \int_{\Omega} v^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega, \quad \forall t \geq 0$$

where the positive constant α is given by the lowest (positive) eigenvalue of

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta \Psi + \lambda \Psi = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{d\Psi}{d\mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finally, we set

$$(9) \quad V(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 d\Omega$$

and

$$(10) \quad \mu[|\nabla v|^2, \epsilon, t] = \mu\{x \in \Omega : |\nabla v|^2 > \epsilon\}.$$

where μ is the Lebesgue measure and $\epsilon = \text{const.} > 0$. In the sequel I will denote the class of perturbations v such that

$$(11) \quad \exists \bar{t} > 0, \exists \eta \in (0, 1) : \mu\left[|\nabla v|^2, \frac{V(0)}{t^{1-\eta}}, t\right] \geq \frac{k}{t^\eta}, \quad \text{a.e. on } (\bar{t}, +\infty),$$

where k is a positive constant [13].

3 The linear Stability

Linearizing (5)₁ about U it follows that

$$(12) \quad \begin{cases} v_t = D\Delta v, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{dv}{dn}(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in R^+, \end{cases}$$

where $D = F'(U)$ is constant.

Theorem 1 *Let $F'(U) = D = \text{const.}$ Then $D \geq 0$ implies*

- i) *the linear stability with respect any perturbation verifying (2)₃.*
- ii) *the linear asymptotically stability with respect to the perturbations belonging to I .*

If $D < 0$, then U is linearly unstable at least with respect to the perturbations (kinematically admissible) belonging to $H_^1(\Omega)$.*

Proof. Denoting by $\frac{dV}{dt}|_{(12)}$ the derivate of V evaluated along the solutions of (12), it turns out that

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}|_{(12)} &= \dot{V}(t) = D \int_{\Omega} v \Delta v \, d\Omega = \\ &= D \int_{\partial\Omega} v \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma - D \int_{\Omega} (\nabla v)^2 \, d\Omega. \end{aligned}$$

In view of (12)₃, it follows that

$$(13) \quad \dot{V}(t) = -D \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega$$

and it turns out that

$$(14) \quad V(t) + D \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega \leq V(0)$$

and hence

$$V(t) \leq V(0) \quad \forall t \geq 0$$

i.e. the stability with respect to the L^2 -norm.

From (14) and (11) it turns out, a.e. in $(\bar{t}, +\infty)$, that

$$(15) \quad \frac{1}{t^{1-\eta}} V(t) \mu \left[|\nabla v|^2, \frac{V(t)}{t^{1-\eta}} \right] \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega.$$

Then, since $V(t)$ is a nonincreasing function, integrating with respect to the time, it follows that

$$(16) \quad V(t) \int_{\bar{t}}^t \frac{1}{\tau^{1-\eta}} \mu \left[|\nabla v|^2, \frac{V(t)}{t^{1-\eta}} \right] d\tau \leq \int_0^{\infty} d\tau \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega < \infty.$$

On the other hand $\forall t \geq 0$

$$(17) \quad \mu \left[|\nabla v|^2, \frac{V(0)}{t^{1-\eta}} \right] \leq \mu \left[|\nabla v|^2, \frac{V(t)}{t^{1-\eta}} \right].$$

Finally $v \in I$, (16) and (17) imply that

$$(18) \quad kV(t) \log t \leq V(t) \int_{\bar{t}}^t \frac{1}{\tau^{1-\eta}} V(t) \mu \left[|\nabla v|^2, \frac{V(0)}{t^{1-\eta}} \right] d\tau \leq C,$$

where C is a positive constant, and hence

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0.$$

Passing to the case $D < 0$, let us consider the perturbation (kinematically admissible) $v \in H_*^1(\Omega)$ verifying (8) for $\lambda = \alpha$. By virtue of (12), setting

$$\frac{h}{2} = \alpha |D| > 0$$

it turns out that

$$\begin{cases} v_t = \frac{h}{2} v, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{dv}{dn}(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in R^+, \end{cases}$$

and hence

$$\dot{V}(t) = -hV(t)$$

which implies

$$V(t) = V(0)e^{ht}.$$

4 Nonlinear Stability

Let $[a, b]$ be any bounded interval containing $U = \bar{u}_0$. Being $F' \in C(R)$, F' is uniformly continuous on $[a, b]$. Therefore, following the procedure used in [5]-[8],

$$\forall \eta > 0; \exists \epsilon(\eta) > 0 : |U'' - U'| < \epsilon$$

implies

$$F'(U) - \eta \leq F'(U'') \leq F'(U') + \eta \quad U', U'' \in [a, b].$$

Let $F'(U) = D > 0$, choosing $U' = U$, $\frac{D}{2} = \eta$ and setting

$$U'' = U' + v$$

it turns out that there exists a positive constant ϵ such that

$$(20) \quad |v| < \epsilon \Rightarrow \frac{D}{2} \leq F'(U + v) \leq \frac{3}{2}D.$$

Theorem 2 *Let $F'(U) = D > 0$ and $\bar{v}_0 = 0$. Then the steady state U is nonlinearly asymptotically exponentially stable with respect to the L^2 -norm.*

Proof. In view of (9), along the solutions of (5), by using the divergence theorem, we obtain

$$(\dot{V})(t) = \int_{\Omega} v \Delta F(U + v) d\Omega = - \int_{\Omega} F'(U + v) (\nabla v)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} F'(U + v) v \nabla v \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

On taking into account (5)₃ and (20) it follows that

$$\dot{V} \leq -\frac{D}{2} \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega.$$

Finally, the Poincaré inequality (7) implies

$$(22) \quad V(t) \leq V(0)e^{-D\alpha t}$$

with α positive constant.

5 A pointwise stability result

Denoting by D the largest subdomain of Ω on each point of which, at time t , $|v(\mathbf{x}, t)|$ is bigger than $\epsilon(t) > 0$, the steady state U will be said to be weakly pointwise attractive if

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\epsilon, t) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

where $\mu(\epsilon, t) = \mu(D(t))$ is the Lebesgue measure of $D(t)$ [15].

Theorem 3 *Let the assumptions of Theorem 3 hold. Then U is weakly pointwise attractive.*

Proof. In fact in [15] the following inequality has been shown

$$(23) \quad \mu(D(t)) \leq \|v(\mathbf{x}, t)\|_2^{\frac{2}{3}}.$$

Then from (22) and (23) it follows that

$$\mu[D(t)] \leq [2V(0)e^{-\alpha Dt}]^{\frac{1}{3}}$$

and hence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu[D(t)] = 0$$

that implies the weakly pointwise attractivity.

Introduced the Liapunov functional

$$(24) \quad V_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \int_{\Omega} v^{2(n+1)} d\Omega$$

the following theorem holds

Theorem 4 *Let the assumptions of Theorem 3 hold. Then U is asymptotically stable with respect to the pointwise norm (a.e.).*

Proof. Because of Theorem 4, it remains only to prove the stability with respect to the pointwise norm. To this end, evaluating the time derivative of (24) along the solutions of (5), we obtain

$$\dot{V}_n(t) = \int_{\Omega} v^{2(n+1)} \Delta F(U + v) d\Omega.$$

By using (5)₃ it follows that

$$\dot{V}_n(t) = -\frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_{\Omega} F'(U + v) (\nabla v^{n+1})^2 d\Omega.$$

From (20) and the Poincaré inequality (7), one obtains

$$\dot{V}_n(t) \leq -\frac{(2n+1)}{(n+1)} D\alpha V_n(t).$$

with α positive constant and hence

$$V_n(t) \leq V_n(0) \exp[-(2n+1)(n+1)^{-1} \alpha Dt].$$

i.e.

$$\int_{\Omega} v^{2(n+1)} d\Omega \leq 2(n+1) V_n(0) \exp[-(2n+1)(n+1)^{-1} \alpha Dt].$$

On raising both sides to the power of $2(n+1)^{-1}$ and, on taking the limit as $n \rightarrow \infty$, one finds that

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |v(\mathbf{x}, t)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |v_0(\mathbf{x})|,$$

then the steady state U is stable in the L^∞ -norm.

6 Nonlinear insect dispersal

Let us consider the nonlinear insect dispersal. Denoting by $u(x, t)$ the population density in Ω , let us assume that $F(u)$ be connected to the diffusion coefficient $D(u)$ by

$$F(u) = \int_0^u D(\xi) d\xi.$$

The typical form for $D(u)$ is [12]

$$D(u) = D_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^m$$

with m, D_0, u_0 positive constants. Therefore it follows that

$$\begin{cases} F(u) = \frac{D_0 u_0}{m+1} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{m+1} \\ F'(U) = D_0 \left(\frac{U}{u_0} \right)^m \end{cases}$$

being $U = \bar{u}_0$, it follows that

$$F'(U) > 0, \quad \forall m > 0.$$

By virtue of theorem 2 it turns out that $\bar{u}_0$ is nonlinearly asymptotically stable with respect to the L^2 -norm.

Acknowledgements - This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.U.R.S.T. (P.R.I.N.): "Nonlinear mathematical problems of waves propagation and stability in continuous media".

References

- [1] J. N. Flavin and S. Rionero, *Asymptotic and other properties of a nonlinear diffusion model*, J. Math. Analysis Appl. 228, 119-140, (1998).
- [2] S. Rionero, *Asymptotic and other properties of some nonlinear diffusion models*, Cont. Mech. Appl. Geoph. Env., Eds B. Straughan, R. Greve, H. Ehrentraut, Y. Wang, Springer, pp. 56-78, (2001).
- [3] S. Rionero, *Asymptotic properties of solutions to nonlinear possibly degenerated parabolic equations in unbounded domains*, Math. and Mech. of Solids, (2003).
- [4] N. Alikakos, R. Rostamian, *Large time behavior of solutions of Neumann boundary value problem for the porous medium equation*, Ind. Univ. Math. Journal, Vol. 30, No 5, (1981).
- [5] J. N. Flavin and S. Rionero, *Stability Properties for Nonlinear Diffusion in Porous and other media*, J. Math. Analysis Appl. 281, 222-232, (2003).
- [6] I. Torcicollo and M. Vitiello, *On the nonlinear diffusion in the exterior of a sphere*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, Vol. LXVIII, pp. 139-146, (2001).
- [7] I. Torcicollo and M. Vitiello, *A note on the nonlinear pointwise stability in the exterior of a sphere*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, Vol. LXX, pp. 111-117, (2003).
- [8] F. Perrini and S. Rionero, *On the nonlinear diffusion in half spaces with application to the porous media*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, Vol. LXIX, (2002).
- [9] J. N. Flavin and S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equation, An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).
- [10] Lawrence C. Evans, *Partial differential Equations*, 1992.
- [11] J. Smoller, *Shock waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, n. 258 of "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", (1983).
- [12] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics Text, 19, Springer-Verlag, (1989).
- [13] M. Gentile and S. Rionero, *symmetric reduction of model in spherical symmetry for benign tumor*, Wascom 2003- 12th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, 241-253, River Edge, NJ, 2004..
- [14] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, (1957).

- [15] S.Rionero, *Asymptotic properties of solutions to nonlinear possibly degenerated parabolic equation in unbounded domains*, Wascom 2003- 12th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, 421-433, River Edge, NJ, 2004.

Dall'estrazione di radice quadrata alla formula del binomio di Newton. Un lungo cammino per un segreto legame.

Nota di Franco Palladino^{*},
Laura Lombardi^{**}, Paolo Occhinegro^{***}, Nicla Palladino^{****}

Presentata dal socio Paolo de Lucia
(Adunanza del 3 dicembre 2004)

Abstract - This paper deals with the complex connection between the Newton's method of extraction of roots both discovery of binomial coefficient and binomial theorem that lay down the general reduction of radicals into infinite power series (binomial expansion).

In the eighteenth century, the Newton's binomial theorem played a fundamental role in every textbook on infinitesimal calculus.

Undoubtedly new, is the link, here showed, between the Bombelli's method for the extraction of the square root of a number and the "hidden calculus" that provides the basis for infinitesimal algorithms according to Leibniz and Newton.

Riassunto - L'articolo esamina il rapporto, particolarmente forte in Newton, tra la procedura di estrazione della radice di un binomio (in particolare, la radice quadrata) e la cosiddetta "formula del binomio" (come pure l'espressione del "coefficiente binomiale"): in tutti e due i settori si mettono in evidenza i contributi originali forniti da Newton e i "calcoli nascosti" che accompagnano il complicato cammino che conduce all'ideazione dei nuovi algoritmi.

La "formula del binomio", o "teorema del binomio", che permette di trasformare un radicale in una serie infinita di potenze (espansione binomiale) ha avuto un ruolo fondamentale in tutti i trattati di calcolo infinitesimale apparsi nel XVIII secolo.

Assolutamente nuovo è il lavoro, qui sviluppato, volto a cogliere e a documentare il legame tra i metodi di approssimazione della radice di un numero, esposti da R. Bombelli nell'*Algebra*, e il "calcolo nascosto" che sta alla base sia dell'algoritmo infinitesimale dato da Leibniz (nella *Nova Methodus*) sia dell'algoritmo che permette lo sviluppo in serie della radice di un binomio, posto da Newton alla base del calcolo integrale.

Key words: Extraction of roots, binomial coefficient, binomial theorem.

^{*} Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Salerno.

^{**} Assegnista dell'Università degli Studi di Salerno - Dipartimento di Matematica e Informatica.

^{***} Liceo Classico "T.L. Caro" Sarno (SA).

^{****} Dottorato in Matematica Applicata e Informatica. Consorzio di Napoli "Federico II" - Seconda Università di Napoli - Salerno - Catania - Palermo.

1. La radice quadrata e i metodi di approssimazione.

I metodi di calcolo della radice quadrata di un numero intero positivo sono storicamente molto antichi. Per iniziare, si vuole sottolineare la distinzione tra metodi *diretti* e metodi *ricorsivi* per il calcolo della radice quadrata di un numero che, per semplicità, nel nostro discorso si può supporre intero positivo.

Un primo metodo, *diretto*, è attribuito a Tolomeo (II sec. d. C.) e si trova esposto sia nell'*Algebra* di Bombelli sia nell'*Arithmetica Universalis* di Newton, per citare due luoghi notevoli.

Questo metodo è utile in ogni caso, sia per una radice *esatta* che per una *non esatta*.

Lo schema grafico che Newton pone (che si presenta conformato *a danda lunga*), per il calcolo della radice quadrata, è pressoché uguale a quello modernamente reperibile in un manuale di aritmetica per la scuola media di primo grado.

Uno dei due esempi numerici portati da Newton consiste nell'estrazione della radice quadrata di 22178791 [Newton 1707, pp. 32-33]:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{22\cdot17\cdot87\cdot91} \mid 4709,43 \text{ etc.} \\
 \underline{16} \qquad \qquad 87 \times 7 = 609 \\
 \quad 617 \qquad \quad 9409 \times 9 = 84681 \\
 \underline{609} \qquad \quad 94184 \times 4 = 376736 \\
 \quad 88791 \qquad 941883 \times 3 = 2825649 \\
 \underline{84681} \\
 \quad 4110.00 \\
 \underline{376736} \\
 \quad 34264.00 \\
 \underline{2825649} \\
 \quad 600751... \\
 \quad \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Il metodo di Tolomeo è esposto, come si è detto, anche nell'*Algebra* di Bombelli, al Libro primo [Bombelli 1966, pp. 34-35]. Forse questo fatto è meno noto poiché l'*Algebra* di Bombelli non è di facile lettura: l'opera è scritta in italiano e la forma della lingua non sempre è di immediata comprensione anche per il lettore italiano moderno.

Il passo, alle pagine citate, dove Bombelli illustra l'estrazione, in particolare, della radice di 5678 effettuata con la stessa procedura *a danda lunga*, è:

Se si haverà a trovare il lato (intendasi radice quadrata, n.d.r.) come sarebbe di 5678, facciasi come si vede qui sotto. Tirasi la linea a tanto lontana, che sotto il numero ci capisca un altro ordine di caratteri, e sopra l'8 si faccia un punto, e poi venendo a man sinistra, lassando un carrattero nel mezzo, e sopra il 6, si faccia un altro punto, e se il numero fosse maggiore, si seguitarà di fare li punti, ma interponendo un punto da un carrattero all'altro, e fatto questo, si ricomincia dall'altro lato a man sinistra andando verso la destra, e si pigliano gli caratteri, che sono fino al primo punto, e si pongano sotto la linea a, il quale è 56. Fatto questo, si trova un numero quadrato, e il più prossimo, ma che non sia maggiore di 56, il quale sarà 49, che il suo lato è 7, il qual 7 si mette sotto il 6, sopra la linea a, sopra del quale è il primo punto, e dui altri 7 si pongano da canto, sotto li quali si tira la linea e poi si somma, che fanno 14, et il prodotto delli detti dui 7 l'uno nell'altro è 49, il quale si mette sotto il 56, e si tira la linea b e si cava di 56 resta 7, et è finito fino al primo punto. E per seguire avanti; se gli aggiunge il 7, che è sopra la linea a fra il 6, e l'8, e farà 77.

Hora si veda quante volte entra il 14, che è sotto la linea e nel 77, che vi entra 5; il qual 5 si mette al pari del 14, e dirà 145, et un altro 5 si mette sotto quello, e si sommano (tirando la linea f) e fa 150, et il medesimo 5 si mette sotto l'8, sopra il quale è l'altro punto, e l'8 si mette sotto la linea b al pari del 77, e fa 778; sotto il quale se gli mette il prodotto di 145 nel 5, che vi è sotto, che è 725, e si cava l'uno dell'altro (tirando la linea c) e resta 53, sotto il quale si tira la virgola d, e se li mette sotto il 150, che è sotto la li-

nea f che dirà $\frac{53}{150}$, et è finita la estrattione, over il lato prossimo di 5678, che sarà 75, e

$\frac{53}{150}$ che solo saranno differenti tanto, quanto è il quadrato del rotto, cioè $\frac{2809}{22500}$.

Lo schema grafico corrispondente che egli presenta è:

$$\begin{array}{r}
 5678 \\
 \hline
 7 \quad \underline{75} \quad a \\
 56 \\
 e \quad 7 \quad \underline{49} \quad b \\
 145 \\
 f \quad 5 \quad \underline{725} \quad c \\
 150 \\
 \underline{53} \quad d \\
 150
 \end{array}$$

Bombelli conclude che la radice quadrata approssimata (il "lato prossimo") di 5678 vale 75 e $\frac{53}{150}$.

Lo stesso esempio, sistemato al modo di Newton e quindi al moderno, si presenterebbe così:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{5678} & 75,3 \text{ etc.} \\
 \hline
 49 & 145 \times 5 = 725 \\
 778 & 1503 \times 3 = 4509 \\
 \hline
 725 & \\
 \hline
 5300 & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Si potrebbe notare che l'algoritmo di Tolomeo ha oggi una trascurabile utilità nella pratica quotidiana o professionale, la sua esecuzione è affidata comunemente ad una macchinetta calcolatrice.

Altri metodi, che sono invece *ricorsivi*, finalizzati ad approssimare il calcolo di una radice quadrata *non esatta*, forniscono l'approssimazione del valore della radice quadrata di un numero naturale utilizzando, per l'appunto, algoritmi di tipo ricorsivo i quali conducono all'approssimazione desiderata del valore della radice con un numero minore di operazioni rispetto al metodo di Tolomeo.

Un metodo *ricorsivo*, primordiale, può essere considerato quello espresso mediante la *regola fondamentale* – si potrebbe chiamarla *regola madre* – che, ancora il medesimo Bombelli, espone al Libro primo dell'*Algebra* [Bombelli 1966, p. 39] per approssimare il valore della radice quadrata di un numero che non sia un quadrato perfetto.

Tale regola, traducendo in linguaggio moderno l'“esempio paradigmatico” fornito da Bombelli per il calcolo della radice quadrata di 13, funziona così:

Il quadrato più prossimo a 13 è 9 la cui radice è 3 (sia per la radice quadrata sia per l'estrazione della radice cubica, pur essa trattata, Bombelli considera “il più prossimo numero” quadrato o cubo, rispettivamente, che non superi il numero di cui si vuole estrarre la radice) e quindi si pone:

$$\sqrt{13} = 3 + x,$$

con x che è un *rotto* dell'unità e quindi $x < 1$;
elevando al quadrato ambo i membri si ottiene:

$$13 = 9 + 6x + x^2,$$

da cui:

$$4 = 6x + x^2 \quad (*)$$

e

$$4 = x(6 + x). \quad (**)$$

A questo punto, trascurando nella (*), x^2 , si ha:

$$x = \frac{4}{6}, \text{ o riducendo la frazione } x = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza la prima delle approssimazioni espresse con un *rotto* risulta essere:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6} \text{ (ovvero } \sqrt{13} = 3 + \frac{2}{3} \text{)}.$$

Volendo un valore meglio approssimato, Bombelli in pratica sostituisce al posto della x , che si trova in parentesi nella (**), il valore $\frac{4}{6}$, per cui si ottiene:

$$4 = x \left(6 + \frac{4}{6} \right),$$

e da ciò

$$x = \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = \frac{3}{5};$$

pertanto la successiva approssimazione risulta essere tale che

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = 3 + \frac{3}{5}.$$

Bombelli si ferma qui.

Proseguendo allo stesso modo si potrebbe ottenere un'altra approssimazione:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}} = 3 + \frac{20}{33}$$

e così quante altre ancora se ne vogliano.

Tradotto il tutto in simboli moderni, la procedura diventa:

	$\sqrt{n}$
	$\sqrt{a^2 + r} = a + x$
	$a^2 + r = (a + x)^2$
	$a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$
	$r = 2ax + x^2$ (*)
	$r = x(2a + x)$ (**)
Trascurando in (*) x^2 si ha:	$x = \frac{r}{2a}$
quindi:	$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$
Sostituendo, nella x posta in parentesi in (**), $x = \frac{r}{2a}$ si ha:	$r = x \left(2a + \frac{r}{2a} \right)$
da cui:	$x = \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$
	$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$
Se si vuole, si può sostituire l'ultimo valore della x nella (**) e, ripetendo la procedura, la radice si approssimerà quanto si vuole.	

Questo procedimento apre le porte alla nozione di frazione continua illimitata. Esso, infatti, ispirò Pietro Antonio Cataldi (1552-1626) nel concepire l'idea di frazione continua (esposta nel *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, et regole da approssimarsi di continuo al vero nelle radici de' numeri non quadrati*, opera edita a Bologna presso Bartolomeo Cochi nel 1613), utile anche per rappresentare la radice quadrata di un numero e per calcolarne il valore approssimato. L'idea di Bombelli, perfezionata con piena consapevolezza da Cataldi, dà alle *frazioni continue illimitate* lo *status ontologico* di ente equivalente (o, se si vuole, corrispondente) mediante cui si può esprimere una radice quadrata *non esatta*.

Una rappresentazione simbolicamente compatta di $\sqrt{13}$, in termini di frazione continua, può essere fornita, con moderna simbologia, dalla formula generale:

$$\sqrt{13} = 3 + x_n$$

dove

$$x_n = \frac{4}{6 + x_{n-1}} \quad \text{con} \quad x_0 = \frac{4}{6},$$

cosa che ovviamente si può fare indipendentemente dall'esempio specifico.

Il metodo di Bombelli, che si è prima esposto, classificato sotto il nome di *regola madre*, viene suggellato dallo stesso Bombelli con la frase:

[...] sicché si vede donde nascano le regole dette di sopra [sul modo di formare il rotto -leggasi la parte frazionaria o decimale- nella estrattione delle radici quadrate].

Infatti, Bombelli aveva pure dato, in precedenza (*di sopra*, secondo la sua espressione), delle regole per il calcolo approssimato delle radici quadrate, rispettivamente, dei numeri 13 (un numero "molto lontano" dall'essere un quadrato perfetto) e 8 (un numero che è "quasi" un quadrato perfetto). Le due regole differiscono tra loro per alcuni dettagli, come si può vedere dai brani riportati e dagli schemi qui presentati. Il modo con cui Bombelli espone le regole non lascia percepire immediatamente la possibilità di arrivare a una frazione continua. Ma è molto importante che Bombelli affermi di aver "trovato con fondamento" la loro giustificazione. Il "fondamento" è dato proprio dalla *regola madre*.

Il primo brano, illustrante la regola per $\sqrt{13}$, a cui è aggiunto, con linguaggio moderno, il relativo schema, è:

[...] presupposto che si voglia trovare il lato prossimo di 13, che sarà 3, e avanzerà 4, il quale si partirà per 6 (doppio del 3 suddetto) ne viene $\frac{2}{3}$, e questo è il primo rotto, che si ha da giungere al 3, che fa $3\frac{2}{3}$, ch'è il prossimo lato di 13, perché il suo quadrato è $13\frac{4}{9}$, ch'è superfluo $\frac{4}{9}$, ma volendosi più approssimare, al 6 doppio del 3 se gli aggiunga il rotto, cioè li $\frac{2}{3}$, e farà $6\frac{2}{3}$, e per esso partendosi il quattro, che avanza dal 9 fino al 13, ne viene $\frac{3}{5}$, e questo si	$\sqrt{13}$	$\sqrt{n}$
	$\sqrt{3^2 + 4} = 3$	$\sqrt{a^2 + r} = a$
	$\sqrt{3^2 + 4} =$ $= 3 + \frac{4}{6} = 3 + \frac{2}{3}$	$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$
	$\sqrt{3^2 + 4} =$ $= 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = 3 + \frac{3}{5}$	$\sqrt{a^2 + r} =$ $= a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}$
	$\sqrt{3^2 + 4} =$ $= 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}} = 3 + \frac{20}{33}$	$\sqrt{a^2 + b} =$ $= a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}}$

avanza dal 9 fino al 13, ne viene $\frac{3}{5}$, e questo si giunge al 3, che fa $3\frac{3}{5}$, ch'è il lato prossimo di 13, di cui il quadrato è $12\frac{24}{25}$, ch'è più prossimo di $3\frac{2}{3}$, ma volendo più prossimo, si ag- gionga il rotto al 6 fa $6\frac{3}{5}$, e con esso si parta pur il 4, ne viene $\frac{20}{33}$, e questo si aggiunga, come si è fatto di sopra al 3 fa $3\frac{20}{33}$, ch'è l'altro numero più prossimo, perché il suo quadrato è $13\frac{4}{1089}$, ch'è è troppo $\frac{4}{1089}$, e volendo più prossimo ... [Bombelli 1966, p. 38].	...	...
--	-----	-----

Nel concludere l'esposizione di questa regola, che egli spinge fino alla sesta applicazione, Bombelli osserva:

E così procedendo si può approssimare a una cosa insensibile.

Il secondo brano, per $\sqrt{8}$, con relativo schema, è:

[...] per trovare il suo lato, si cavarà 4 maggior numero quadrato, e resterà 4, che partito per il doppio di 2, lato del numero quadrato, ne verrà $\frac{4}{4}$, che sarebbe 1, il quale gionto col 2 fa 3. Et in questo caso quadrisi il 3 fa 9, del quale cavatone 8 numero di cui se ne ha a pi-	$\sqrt{8}$	$\sqrt{n}$
	$\sqrt{2^2 + 4} = 2$	$\sqrt{a^2 + r} = a$
	$\sqrt{2^2 + 4} = 2 + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3$	$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$
	$\sqrt{2^2 + 4} =$ $= 3 - \frac{3^2 - 8}{6} = 3 - \frac{1}{6} =$ $= 2 + \frac{5}{6}$	$\sqrt{a^2 + r} =$ $= \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 - (a^2 + r)}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$

gliare il lato, resta 1, e questo si parte per 6, doppio del 3, ne viene $\frac{1}{6}$ il qual rotto si cava del 3, e resta $2\frac{5}{6}$ per il lato prossimo di 8, il quadrato del quale è $8\frac{1}{36}$, ch'è $\frac{1}{36}$ superfluo, e volendosi più approssimare: aggiungasi a $2\frac{5}{6}$ il 3 fa $5\frac{5}{6}$, e per questo si parta quel 1 detto di sopra, ne viene $\frac{6}{35}$ che levato di 3 resta $2\frac{29}{35}$, e questo sarà l'altro lato più prossimo, e volendosi più approssimare ... [Bombelli 1966, p. 38].	$\begin{aligned}\sqrt{2^2+4} &= \\ &= 3 - \frac{3^2-8}{3+2+\frac{5}{6}} = \\ &= 3 - \frac{1}{\frac{35}{6}} = \\ &= 3 - \frac{6}{35} = 2 + \frac{29}{35}\end{aligned}$...	$\begin{aligned}\sqrt{a^2+r} &= \\ &= \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 - (a^2+r)}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 - (a^2+r)}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}}\end{aligned}$...
---	--	--

Nel concludere l'esposizione di quest'altra regola, Bombelli osserva:

E procedendo si approssimerà quanto l'huomo vorrà.

Come si vede in ciascuno dei due schemi, oltre al caso numerico è affiancata, al moderno, la procedura fatta servendosi di lettere: essa è riferita a un generico numero intero positivo n , visto sotto la forma $a^2 + r$ (dove a^2 è il più grande quadrato contenuto in n e r è la differenza tra n e a^2).

Naturalmente, è inutile cercare, partendo dai primi passi, una corrispondenza perfetta tra i valori approssimati, ottenuti ad ogni passo, mediante ciascuna delle tre regole (*regola madre* più le ultime due ora presentate). Bombelli, da abile calcolatore, sicuramente avrà notato questo fatto per tempo ma, da abile matematico, avrà, altrettanto presto, colto l'importanza che in casi simili (dove i calcoli portano a compiere un numero di passi indefinito, "fin quando l'huomo vorrà" egli scrive) è il carattere definitivo di questa serie di passi di cui va tenuto conto.

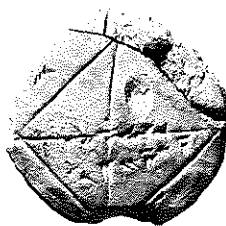
Un'altra considerazione sembra particolarmente utile fare: con la *regola madre* l'approssimazione, da esigenza computistica, passa ad assumere dignità di procedura scientifica.

Si può, inoltre, notare che al primo passo di approssimazione, incluso nella procedura qui esposta sia per il calcolo di $\sqrt{13}$ e sia, poi, di $\sqrt{8}$, egli si serve di un'osservazione empirica -la cui origine è antichissima- secondo cui il primo valore approssimato, $3 + \frac{4}{6}$ (nel caso di $\sqrt{13}$), venga fuori dalla media aritmetica calcolata tra 3 e $\frac{13}{3}$. (Espresso il tutto in simboli, la media aritmetica tra a e $\frac{n}{a}$, ovvero tra a e $\frac{a^2 + r}{a}$, è:

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{a^2 + r}{a} \right) = \frac{2a^2 + r}{2a} = a + \frac{r}{2a}.$$

Osservazione empirica che risale ai babilonesi, per quanto, nella letteratura storico-matematica, essa venga spesso attribuita al pitagorico Archita di Taranto (428-365 a. C.) o ad Erone di Alessandria (circa 75 d. C.) o, addirittura, a Newton (ma si avverte subito che essa non compare in nessun luogo dell'*Arithmetica Universalis* dove sarebbe ragionevole cercarla). Quest'ultima attribuzione è infatti fuorviante, poiché, come qui si vedrà più avanti, essa sembra avvenire sulla base del fatto che in altre opere, che più oltre si citeranno, Newton propone un algoritmo per il calcolo della radice quadrata di un binomio del tipo $(a^2 + x^2)$ al fine di ottenere lo sviluppo in serie di $\sqrt{a^2 + x^2}$ per poi effettuare l'integrazione termine a termine necessaria per calcolare l'area compresa "sotto la curva" del tipo $y = \sqrt{a^2 + x^2}$: la prima approssimazione corrisponde ad un calcolo fatto utilizzando la media aritmetica.

Circa il modo di fare dei matematici babilonesi, è da dire che questi per trovare la radice quadrata *non esatta* di un numero naturale utilizzavano un metodo di approssimazione, di cui si è avuta conferma studiando la tavoletta YBC 7289 della *Collezione babilonese dell'Università di Yale* (si veda figura seguente), tavoletta risalente al periodo paleobabilonese della dinastia Hammurabi (1800-1600 a. C.), in cui è disegnato un quadrato con le sue diagonali e in cui sono impresse delle cifre a caratteri cuneiformi.



Il metodo, che è connesso alla ricerca del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato sulla base del "Teorema di Pitagora", consiste, in generale, nel calcolare due valori approssimati della radice, uno per difetto e l'altro per eccesso e nel prendere, come successiva approssimazione, la media aritmetica fra i due valori. Tale procedimento si può ripetere ottenendo così, di volta in volta, una migliore approssimazione della radice cercata.

Utilizzando, questa volta, il metodo dei babilonesi si vuole calcolare, come esempio, un valore approssimato della radice di 2. Calcolo che si esprimerà in frazioni decimali, benché sia da notare che i babilonesi facessero uso di frazioni sessagesimali (per questo si veda [Neugebauer 1974, pp. 52-53]): tale era, infatti, il loro ordinario sistema di numerazione.

Nel caso di $\sqrt{2}$, presa ad esempio, come prima approssimazione si sceglie il valore 1 (numero il cui quadrato è più vicino a 2) e si ha la relazione:

$$1 \cdot (2 : 1) = 2$$

la quale esprime il prodotto tra il valore, della radice, approssimato per difetto (che è 1) e l'altro (che è 2:1) approssimato ovviamente per eccesso. La media tra questi due valori costituisce una seconda, più spinta, approssimazione della radice di 2:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}(1+2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Essendo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} > 2,$$

allora l'approssimazione trovata, $\frac{3}{2}$, risulta essere un valore per eccesso di $\sqrt{2}$.

Ripetendo lo stesso procedimento si ha:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(2 : \frac{3}{2}\right) = 2$$

ovvero

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2,$$

in tal modo si è ottenuto $\frac{4}{3}$ che è il valore, approssimato per difetto, di $\sqrt{2}$ da far corrispondere a $\frac{3}{2}$ che era il valore approssimato per eccesso. Segue che una successiva, ancora più spinta, approssimazione, è data dalla media aritmetica dei precedenti valori, $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{3}$, e quindi:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} = 1,416.$$

Come si può notare, il valore sopra ritrovato rappresenta una buona approssimazione della radice di 2, ottenuta ripetendo solo due volte il procedimento della media attribuito ai babilonesi.

Il metodo dei babilonesi si ritrova esposto nella *Metrica* di Erone come rivelava Paul Tannery (1843-1904) in [Tannery 1894]. Gino Loria (1862-1954), nel riprendere l'articolo di Tannery, considera proprio l'esempio di Erone dell'estrazione della radice quadrata di 720 [Loria 1914, pp. 785-786].

In termini moderni, il procedimento sopra descritto, che ricorre alla media aritmetica, si può esprimere utilizzando la seguente formula (che, a quanto si è potuto constatare, la maggioranza degli studiosi oggi lega al nome di Newton):

$$\sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{a} + a \right)$$

dove a , al primo passo, è un'approssimazione, la più vicina possibile, del valore della radice quadrata di n , mentre in tutti i passi successivi al posto di a va sostituito, di volta in volta, il risultato ottenuto calcolando il secondo membro della formula precedente. La procedura ha termine quando si ottiene un risultato che coincide con quello che immediatamente l'ha preceduto.

La formula precedente si potrebbe, come si dice, indicizzare, il che mette meglio in evidenza la natura ricorsiva del procedimento. Detto, infatti, x_{i+1} il generico valore approssimato della radice quadrata di n , indicata con $\sqrt{n}$, si ha:

$$\sqrt{n} = x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{x_i} + x_i \right)$$

con $i = 0, 1, 2, 3$, eccetera, e dove x_0 è la prima approssimazione scelta.

Per curiosità, si vuol far notare che a questa stessa formula ci si può arrivare ragionando al seguente modo.

Supposto che si voglia calcolare $\sqrt{n}$, si pone:

$$x = \sqrt{n},$$

che si può scrivere:

$$x^2 = n,$$

ovvero

$$x \cdot x = n,$$

cioè

$$x = \frac{n}{x}.$$

Ipotizzato che x_0 sia una prima approssimazione del valore di $\sqrt{n}$, dalla precedente relazione segue che anche $\frac{n}{x_0}$ lo è. Allora la media aritmetica delle due approssimazioni fornisce un valore x_1 più vicino a quello di $\sqrt{n}$, rispetto a x_0 :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{n}{x_0} \right).$$

Utilizzando il valore x_1 , così ottenuto, e ripetendo lo stesso ragionamento, si può scrivere:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{n}{x_1} \right)$$

e così via, fino ad ottenere l'approssimazione desiderata:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{n}{x_i} \right).$$

per $i = 0, 1, 2, \dots$, dove x_0 rappresenta la prima approssimazione scelta.

Una riflessione intermedia può già essere fatta: il ricorso alla media aritmetica, maturato in età babilonese, per trovare approssimazioni sempre più spinte del valore di una radice *non esatta* sarà stato di "conforto", o "rinforzo", a Bombelli per convincersi della dignità scientifica della *regola madre* da lui e-

sposta e nella quale è “scientificamente accettato” che si possano trascurare delle quantità.

Infatti, ragionando come fa Bombelli nell'estrarre la radice di 13, si ha:

$$\sqrt{n} = a + x$$

dove a è il valore il cui quadrato più si avvicina ad n , senza superarlo; elevando al quadrato ambo i membri della precedente relazione

$$n = a^2 + 2ax + x^2;$$

trascurando, in prima approssimazione, x^2 , si ottiene:

$$x = \frac{n - a^2}{2a};$$

da cui:

$$\sqrt{n} = a + x = a + \frac{n - a^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{n}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{n}{a} \right).$$

Come si vede, nella prima approssimazione ottenuta, dopo a , si ritrova presente la media aritmetica.

Si può riscontrare la presenza delle medie aritmetiche anche nel metodo elementare, ben noto in *calcolo numerico*, denominato metodo “delle tangenti” o “di Newton”, che serve a trovare le soluzioni di una generica equazione non lineare $f(x) = 0$ quando non esiste una formula che possa fornire l'espressione analitica della soluzione. È noto che il “metodo delle tangenti” consiste nell'approssimare “localmente”, a partire da un opportuno punto iniziale, la curva $f(x)$ con la retta tangente in quel punto.

Si può partire, per fare un esempio, dall'equazione

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

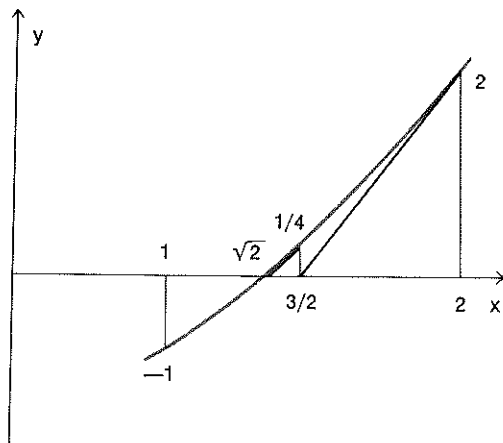
Scelto come “punto iniziale” $P_1 = (x_1, y_1)$, per esempio $(2, 2)$, si può porre $y = f(x)$, in questo caso $y = x^2 - 2$, e considerarne il grafico (la “curva”) riferito a un sistema di assi cartesiani x, y . Si può approssimare la curva di equazione $y = x^2 - 2$ mediante la retta r , tangente la curva stessa nel punto P_1 ; retta che ha equazione

$$r(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

dove $f'(x_1)$, coefficiente angolare della retta, è il valore assunto in x_1 dalla derivata prima della funzione $f(x)$ (in questo caso $f'(x) = 2x$; e $f'(x_1) = 4$).

In tal modo, risolvere il problema $f(x) = 0$ equivale a risolvere il problema $r(x) = 0$, ossia trovare il punto, P_2 , d'intersezione della retta tangente $r(x)$ con l'asse delle ascisse; la soluzione risulta essere

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2}.$$



Si può poi ripetere il procedimento, utilizzando come punto iniziale per l'approssimazione, il punto $P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e approssimando la curva $y = x^2 - 2$ con la retta r tangente la curva stessa nel punto P_2 . Si cerca pertanto la soluzione x_3 di $r(x)=0$ che si ottiene risolvendo l'equazione

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Il "metodo di Newton" permette di costruire perciò una successione di punti $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, che approssimano sempre meglio la soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$, ossia la radice quadrata di 2; il termine generico x_i è l'ascissa del punto di intersezione con l'asse x della retta tangente la curva $y = x^2 - 2$ nel punto (x_i, y_i) e si ottiene dalla formula

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}.$$

Tenendo conto in questo caso considerato $f(x) = x^2 - 2$, detta formula diventa:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^2 - 2}{2x_{i-1}} = \frac{x_{i-1}^2 + 2}{2x_{i-1}} = \frac{1}{2} \left(x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} \right),$$

come si vede l'*i-esimo* valore approssimato della radice viene fuori dalla media aritmetica calcolata tra l'approssimazione precedente, x_{i-1} , e il rapporto tra il radicando, 2, e x_{i-1} .

Nel caso che l'equazione sia del tipo $y = x^2 - n$, la stessa formula diventa, naturalmente

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^2 - n}{2x_{i-1}} = \frac{x_{i-1}^2 + n}{2x_{i-1}} = \frac{1}{2} \left(x_{i-1} + \frac{n}{x_{i-1}} \right).$$

2. Newton e l'estrazione di radice

Talvolta accade di leggere, come si è già avvertito, che l'algoritmo di estrazione della radice quadrata, attribuito comunemente a Newton, si troverebbe nell'*Analysis per Quantitatum Series, etc.* e nell'opera *La Méthode des Fluxions*.

Innanzitutto, Newton, nel *De Analisi* e nel trattato *La Méthode des Fluxions* (le quali sono opere concepite nei primi decenni della seconda metà del Seicento; la prima, intorno al 1669 col titolo provvisorio di *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* e stampata per la prima volta nel 1711 in *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias*, la seconda, intorno al 1671 col titolo provvisorio di *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* e pubblicata per la prima volta nel 1736, in versione inglese, col titolo *The Method of Fluxions and Infinite Series* e, poi, in latino nel 1742), sviluppa in serie di potenze particolari funzioni del tipo, rispettivamente, $y = \frac{a^2}{b+x}$ e

$y = \sqrt{a^2 + x^2}$ (si vedano [Newton 1723, pp. 6-7] e [Newton 1740, pp. 5-6]). Nel primo caso, eseguendo la cosiddetta *divisione lunga*, o "divisione di Mercator" che quest'ultimo autore rende pubblica nella *Logarithmotechnia* del 1668, nel secondo col metodo che egli chiama di estrazione della radice.

Newton aveva tenuto a sottolineare il legame strutturale tra questi metodi "simbolici" (e cioè il calcolo mediante cui si trasforma quella che in termini aggiornati si chiama *funzione razionale fratta* e, associata ad essa, la *radice quadrata del binomio*, in serie di potenze) e il metodo con cui correntemente si ese-

guivano, e si eseguono, rispettivamente, le operazioni di divisione e di estrazione di radice che riguardino puramente dei numeri. Infatti, nell'*Epistola prior* (13 giugno 1676 [Gerhardt 1971, 1, pp. 100-101]), che egli manda a Leibniz via Oldenburg (uno dei segretari della Royal Society di Londra), scrive:

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in decimalibus numeris.

Per l'estrazione della radice quadrata di $(a^2 + x^2)$ egli effettua un calcolo rappresentato dallo schema (a cui si è qui aggiunto, rispetto all'originale, soltanto l'indicazione di 1^a, 2^a, ecc. differenza parziale):

$$\begin{array}{rcl}
 & \sqrt{a^2 + x^2} & \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{etc.} \right. \\
 & \underline{a^2} & \\
 1^{\text{a}} \text{ diff. parz.} & 0 + x^2 & \\
 & \underline{x^2 + \frac{x^4}{4a^2}} & \\
 2^{\text{a}} \text{ diff. parz.} & 0 - \frac{x^4}{4a^2} & \\
 & \underline{-\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}} & \\
 3^{\text{a}} \text{ diff. parz.} & 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} & \\
 & \underline{+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}} & \\
 4^{\text{a}} \text{ diff. parz.} & 0 - \frac{5x^8}{648a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} & \\
 & \text{etc.} &
 \end{array}$$

Il risultato finale dello sviluppo in serie della radice di $(a^2 + x^2)$ è quello riportato in alto a destra (dopo la parentesi tonda) dello schema indicato.

Il *primo termine dello sviluppo*, vale a dire a , si ottiene effettuando semplicemente la radice di a^2 .

La prima differenza parziale tra il radicando, ossia $a^2 + x^2$, e a^2 è uguale a x^2 .

Il *secondo termine dello sviluppo*, vale a dire $\frac{x^2}{2a}$, Newton l'avrebbe ottenuto, a quanto si intuisce, dividendo x^2 (1^a diff. parz.) per a , e viene $\frac{x^2}{a}$; e moltiplicando poi questo risultato per $\frac{1}{2}$.

La seconda differenza parziale è ottenuta sottraendo da x^2 il prodotto di $\frac{x^2}{a}$ (comparso nel passo precedente) per a (1° termine dello sviluppo), più il quadrato di $\frac{x^2}{2a}$ (2° termine dello sviluppo). Viene fuori $-\frac{x^4}{4a^2}$.

Il *terzo termine dello sviluppo*, vale a dire $-\frac{x^4}{8a^3}$, Newton l'avrebbe ottenuto dividendo $-\frac{x^4}{4a^2}$ (2^a diff. parz.) per a , da cui ne viene $-\frac{x^4}{4a^3}$; poi moltiplicando questo risultato per $\frac{1}{2}$.

La terza differenza parziale è ottenuta sottraendo da $-\frac{x^4}{4a^2}$ il prodotto di $-\frac{x^4}{4a^3}$ (comparso nel passo precedente) per a (1° termine dello sviluppo), più il prodotto dello stesso $-\frac{x^4}{4a^3}$ per $\frac{x^2}{2a}$ (2° termine dello sviluppo), più il quadrato del terzo termine dello sviluppo. Viene fuori $\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$.

Il *quarto termine dello sviluppo*, vale a dire $\frac{x^6}{16a^5}$, Newton l'avrebbe ottenuto dividendo $\frac{x^6}{8a^4}$ (Attenzione! Considera solo il primo termine della 3^a diff. parz. e trascura l'altro) per a , e viene $\frac{x^6}{8a^5}$; e moltiplicando poi questo risultato per $\frac{1}{2}$.

La quarta differenza parziale è ottenuta sottraendo da $\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$ il prodotto di $\frac{x^6}{8a^5}$ (comparso nel passo precedente) per a (1° termine dello sviluppo), più il prodotto dello stesso $\frac{x^6}{8a^5}$ per $\frac{x^2}{2a}$ (2° termine dello sviluppo), più il prodotto dello stesso $\frac{x^6}{8a^5}$ per $-\frac{x^4}{8a^3}$ (3° termine dello sviluppo), più il quadrato del quarto termine dello sviluppo. Viene fuori $-\frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}$.

Il *quinto termine dello sviluppo*, vale a dire $-\frac{5x^8}{128a^7}$, Newton l'avrebbe ottenuto dividendo $-\frac{5x^8}{64a^6}$ (Attenzione! Considera solo il primo termine della 4ª diff. parz. e *trascura gli altri due*) per a , e viene $-\frac{5x^8}{64a^7}$; e moltiplicando poi questo risultato per $\frac{1}{2}$.

E così via.

Per rendere più esplicito il carattere ricorsivo di quest'algoritmo si può provare a leggerlo secondo quest'altra modalità:

Data

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

l'esecuzione è:

- $\sqrt{a^2} = a$ (*primo termine dello sviluppo*).
- Si sottrae, $(a^2 + x^2) - a^2 = x^2$ (1ª diff. parz.); e si moltiplica $x^2 \cdot \frac{1}{2a} = \frac{x^2}{2a}$ (*secondo termine dello sviluppo*).
- Si sottrae, $x^2 - \left[x^2 + \left(\frac{x^2}{2a} \right)^2 \right] = -\frac{x^4}{4a^2}$ (2ª diff. parz.); e si moltiplica $-\frac{x^4}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{x^4}{8a^3}$ (*terzo termine dello sviluppo*).

Si noti che l'espressione: $\left[x^2 + \left(\frac{x^2}{2a} \right)^2 \right]$ può essere interpretata come

$$\left[2a \left(\frac{x^2}{2a} \right) + \left(\frac{x^2}{2a} \right)^2 \right].$$

- Si sottrae, $-\frac{x^4}{4a^2} - \left(-\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \right) = \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$ (3^a diff. parz.); e si moltiplica il solo primo termine (*trascurando l'altro*), $\frac{x^6}{8a^4}$, per il solito fattore $\frac{1}{2a}$ e si ottiene $\frac{x^6}{16a^5}$ (*quarto termine dello sviluppo*).

Si noti ancora che l'espressione $\left(-\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \right)$ può essere interpretata come $\left[2a \left(-\frac{x^4}{8a^3} \right) + 2 \left(\frac{x^2}{2a} \right) \left(-\frac{x^4}{8a^3} \right) + \left(\frac{x^4}{8a^3} \right)^2 \right]$

- Si sottrae, $\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} - \left(\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \right) = -\frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}$ (4^a diff. parz.); e si moltiplica soltanto il primo termine del trinomio ottenuto (*trascurando gli altri due termini*), $-\frac{5x^8}{64a^6}$, per il solito $\frac{1}{2a}$ e si ottiene $-\frac{5x^8}{128a^7}$ (*quinto termine dello sviluppo*).

Ancora si noti che $\left(\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \right)$ può essere interpretata

$$\text{come } \left[2a \left(\frac{x^6}{16a^5} \right) + 2 \left(\frac{x^2}{2a} \right) \left(\frac{x^5}{16a^5} \right) + 2 \left(-\frac{x^4}{8a^3} \right) \left(\frac{x^5}{16a^5} \right) + \left(\frac{x^5}{16a^5} \right)^2 \right].$$

- E così via.

È concretamente pensabile che Newton, o chi eventualmente prima di lui sia pervenuto a quest'algoritmo della radice quadrata, sia stato "confortato" nello spingere sempre più avanti i passi dettati dall'algoritmo (cosa che probabilmente sarà accaduta anche a Bombelli, convincendolo della dignità scientifica della

regola madre) dalla constatazione che ai primi due termini dello sviluppo in serie si poteva arrivare anche mediante il calcolo della media aritmetica (calcolo che era stato fatto, a suo tempo, già dai babilonesi, come si è detto), una volta interpretato $(a^2 + x^2)$ sotto la forma, prima vista, $(a^2 + r)$. Ma la peculiarità di quest'algoritmo è rappresentata dal fatto che certe quantità vengano trascurate, convinti che sia scientificamente "lecito" farlo: in ciò sta la sostanziale differenza tra il calcolo che conduce all'estrazione della radice quadrata *non esatta* eseguito prima e dopo la comparsa del metodo adottato da Newton (nel caso di un numero il discriminare è tra il prima e il dopo Bombelli).

Newton sembra non voler debitamente sottolineare che nella procedura simbolica si trascurino delle quantità definibili come una sorta di "infinitesimi di ordine superiore". Trascurare siffatte quantità era già stato chiaramente posto in essere da Bombelli mentre Leibniz, nel concepire le regole di differenziazione (presentate nell'articolo recante il titolo *Nova Methodus ...*, [Gerhardt 1971, 5, pp. 220-226] pubblicato nel 1684), rivelerà soltanto dopo, nella corrispondenza che ha con altri filosofi e matematici [Palladino 1995], di aver anch'egli "trascurato" qualcosa.

Forse non è inutile ricordare che dalla corrispondenza epistolare di Leibniz viene fuori, infatti, quello che si può denominare un "calcolo nascosto" che sta dietro le sue regole di differenziazione enunciate senza alcun commento nell'articolo citato. Calcolo che si rivela mettendo in chiaro la procedura da lui concepita (la quale è strutturalmente uguale a quella adottata da Bombelli nella *regola madre* -e l'algebra di Bombelli è ben conosciuta a Leibniz, come si vede scorrendo i relativi volumi raccolti sotto il titolo di *Mathematische Schriften*); cosa che si va a fare qui per un'equazione presa ad esempio.

Leibniz considera un'equazione del tipo:

$$y = x^2$$

sostituisce y con $y + dy$ e x con $x + dx$, dove dx e dy sono degli incrementi "infinitamente piccoli", ed ha:

$$\begin{aligned} y + dy &= (x + dx)^2 \\ y + dy &= x^2 + 2xdx + (dx)^2 \end{aligned}$$

poi elide y e x^2 poiché si compensano:

$$dy = 2xdx + (dx)^2$$

e successivamente trascura $(dx)^2$, perché è "ancora più piccolo" di dx , ottenendo

$$dy = 2x dx$$

e quindi il rapporto differenziale

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x}$$

che gli interessa al fine del calcolo della sottotangente t in un punto della curva $y = x^2$.

È a partire da Bombelli, nel Cinquecento, per arrivare a Newton (e a Leibniz) nel Seicento, che i procedimenti di approssimazione, adoperati sostanzialmente per un numero finito di passi e connotati da un certo “spirito alchimistico”, assumono più moderna dignità scientifica: l'approssimazione viene “domata” e “unificata” poiché si comincia ad assumere a buon titolo una nuova concezione dell'infinito in matematica e, insieme, il suo corrispondente controllo.

3. Newton tra l'algoritmo di estrazione della radice e la formula del binomio.

Ci si può chiedere in quale rapporto stiano l'esecuzione, secondo Newton, di $\sqrt{a^2 + x^2}$ e la cosiddetta “formula del binomio” che permette di ottenere lo sviluppo dell'espressione $(a^2 + x^2)^r$ con r razionale (in particolare con $r = \frac{1}{2}$).

Quali interazioni, se vi sono state? E, in caso affermativo, quale dei due algoritmi avrà fatto da viatico all'altro? O vi è stata la semplice constatazione che un ponte era naturalmente gettato tra l'algoritmo di esecuzione di $\sqrt{a^2 + x^2}$ e la “formula del binomio”?

Newton nella cosiddetta *Epistola posterior*, del 24 ottobre 1676 [Gerhardt 1971, 1, p. 124], inviata a Leibniz, scrive che la regola generale per ridurre la radice quadrata in serie infinita di potenze l'aveva concepita prima di aver formalizzato la regola per l'estrazione della radice di un binomio del tipo $(a^2 + x^2)$:

Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas series per regulam illam, quam posui initio epistolae prioris, *antequam scirem extractionem radicum* [il corsivo è aggiunto, n.d.r.].

Volendo provare a fare chiarezza al riguardo, si vuole riportare, innanzitutto, un ampio stralcio del brano, appartenente all'*Epistola prior* [Gerhardt 1971,

1, pp. 100-101], in cui Newton rivela la sua regola o teorema che ha avuto un ruolo fondamentale in tutti i trattati di Calcolo infinitesimale del XVIII secolo:

Quamquam Dni. Leibnitii modestia, in excerptis, quae ex Epistola ejus ad me nuper misisti, nostratibus multum tribuat circa speculationem quandam infinitarum serierum, de qua jam coepit esse rumor: nullus dubito tamen quin ille, non tantum (quod asserit) methodum reducendi quantitates quascunque in ejusmodi series, sed et varia compendia, fortè nostris similia, si non et meliora, adinvenerit. Quoniam tamen ea scire pervelit, quae ab Anglis ea in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in hanc speculationem inciderim: ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum quae mihi occurrerunt, ad te transmissi.

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem, et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in decimalibus numeris. Haec sunt fundamenta harum reductionum; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc Teorema:

$$\sqrt[m]{P + PQ} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$

Ubi $P + PQ$ significat quantitatem, cujus radix vel etiam dimensio quaevis vel radix dimensionis investiganda est, P primum terminum quantitatis ejus, Q reliquos terminos divisos per primum, et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensionis ipsius $P + PQ$ sive dimen-

sio illa integra sit, sive (ut ita loquar) fracta, sive affirmativa, sive negativa. (Benché, nei brani della sua lettera che mi avete recentemente inviato, il buon senso del signor Leibniz riconosce un grande credito ai nostri [matematici inglesi] per le loro ricerche riguardanti le serie infinite intorno alle quali già si dibatte: io non dubito minimamente, infatti, che egli abbia scoperto -come afferma- non soltanto il metodo per ridurre una qualunque quantità in una serie siffatta ma anche varie forme abbreviate, forse simili alle nostre se non migliori. Poiché tuttavia egli desidera molto di sapere ciò che gli inglesi hanno scoperto su tale argomento, e siccome io stesso mi sono applicato a queste ricerche da qualche anno: per soddisfare almeno in parte i suoi desideri, ti trasmetto alcune cose che ho trovato.

Le frazioni sono ridotte a delle serie infinite mediante la divisione e le quantità sotto radice lo sono mediante l'estrazione di radice, strutturando queste operazioni simboliche allo stesso modo con cui si suole operare quando si tratti di numeri decimali. Questi sono i fondamenti di tali riduzioni; ma le estrazioni di radici sono molto abbreviate da questo teorema

$$\sqrt[m]{P + PQ} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$

Dove $P + PQ$ significa la quantità di cui si deve trovare la radice o anche qualsiasi potenza o la radice di una potenza, P significa il primo termine di quella quantità, Q i rimanenti termini divisi per il primo, e $\frac{m}{n}$ l'indice numerico della potenza di $P + PQ$ sia che la dimensione sia intera sia - come si dice - fratta, sia positiva, sia negativa.)

Si fa notare, come è facile capire, che

$$A = P^{\frac{m}{n}}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \quad C = \frac{m-n}{2n}BQ, \quad \dots$$

Dalla lettura delle due *Epistole* e dalla consultazione dei manoscritti matematici di Newton, sembra che le tappe di avvicinamento all'ideazione della "formula del binomio" siano state quelle che qui di seguito si va ad esporre.

Come lo stesso Newton mette in evidenza nell'*Epistola posterior*, egli vuole andare oltre lo sviluppo in serie di potenze dei binomi del tipo $(1-x^2)^0$, $(1-x^2)^1$, $(1-x^2)^2$, ..., serie utili a trovare le aree comprese tra gli archi delle curve, rappresentate rispettivamente dalle funzioni ottenute uguagliando y a ciascuno di tali binomi, e l'asse delle x (cosa che già si poteva apprendere dagli scritti di Wallis). Il suo desiderio è quello di trovare analoghe aree nel caso di funzioni in cui lo stesso binomio veniva elevato a un esponente razionale del tipo: $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $y = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $y = (1-x^2)^{\frac{5}{2}}$, ecc.

A tal proposito, egli nota che integrando termine a termine, come oggi si direbbe, gli sviluppi relativi agli esponenti 0, 1, 2, ecc., si ottiene, rispettivamente,

$$x; \quad x - \frac{1}{3}x^3; \quad x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5; \quad x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7; \quad \text{ecc.}$$

o, se si vuole, per comodità:

$$x + \frac{0}{3}x^3; \quad x - \frac{1}{3}x^3; \quad x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5; \quad x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7; \quad \text{ecc.}$$

A questo punto, al fine di trovare le serie corrispondenti alle integrazioni dei binomi, con esponenti razionali, e cioè $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$, ecc., egli pensa di *intercalare* o *interpolare*, progressivamente, tra la prima e la seconda serie, e poi tra la seconda e la terza serie, e ancora tra la terza e la quarta, eccetera, una nuova serie, e di ognuna di essa dà subito i primi due termini:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}, \quad x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}, \quad x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}.$$

Termini che sono giustificati sulla base di una *prima analogia*: constatato che le serie calcolate partendo da binomi con esponenti interi (0 compreso, poi 1, 2, 3, ecc.) si presentano in modo tale da avere tutte per primo termine x e per

La legge di formazione dei numeri che compaiono nelle caselle di questo “triangolo” è, come noto, tale che l'elemento di posto (i, j) , dove i indica la riga e j la colonna, si ottiene sommando l'elemento di posto $(i - 1; j - 1)$ con l'elemento di posto $(i, j - 1)$.

La stessa legge di formazione è, “algebricamente”, più in generale esposta nella tabella

$\frac{0}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{8}{2}$	...
a	a	a	a	a	...
b	$b + a$	$b + 2a$	$b + 3a$	$b + 4a$	...
c	$c + b$	$c + 2b + a$	$c + 3b + 3a$	$c + 4b + 6a$	...
d	$d + c$	$d + 2c + b$	$d + 3c + 3b + a$	$d + 4c + 6b + 4a$	...

Newton estende (modo di fare tipico del “periodo eroico” che vide la nascita del calcolo infinitesimale: è un'estensione della conoscenza, fatta per *analogia*, che ha avuto sempre tanta parte anche nello sviluppo delle scienze matematiche) l'interpretazione di questo tabulato dal tradizionale “Triangolo di Pascal” a un triangolo in cui ci siano anche delle *colonne intercalate* (corrispondenti ai menzionati esponenti frazionari $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, ecc.):

$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
a	a	a	a	a	a	...
b	$b+a$	$b+2a$	$b+3a$	$b+4a$	$b+5a$	...
c	$c+b$	$c+2b+a$	$c+3b+3a$	$c+4b+6a$	$c+5b+10a$	...
d	$d+c$	$d+2c+b$	$d+3c+3b+a$	$d+4c+6b+4a$	$d+5c+10b+10a$	...

Si ha così quest'ultimo tabulato (“algebrico”) riadattato, o dilatato, per far posto, nei “pori”, alle *intercalazioni*. Se la stessa dilatazione si effettua sul tabulato “aritmetico”, corrispondente all'ultimo qui considerato, si nota che la prima riga di termini, a partire dalla “riga d'intestazione” fatta da: $\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$, ecc., ha tutte le caselle occupate dal numero 1 (si veda la tabella successiva), mentre la seconda è formata dalla striscia $\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$, ecc. Tutto questo è conforme alla *prima analogia*.

Per quanto concerne, poi, le successive righe, a partire dalla terza, in esse sono esplicitati soltanto i numeri formanti le colonne sotto le “intestazioni inte-

re” $\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}$, ecc., ma restano “scoperte” (ovviamente a partire dal terzo posto in poi, scendendo nella colonna) le caselle sotto le colonne con “intestazioni fratte” $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, ecc., come in figura:

$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
1	1	1	1	1	1	...
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	...
0		0		1		...
0		0		0		...

Per conseguenza, se si considera, ad esempio, la terza riga e si vogliono riempire con numeri opportuni le “caselle scoperte”, utilizzando i numeri esplicitati nelle altre caselle della stessa riga si possono, uguagliando ciascuno di questi numeri con la corrispondente espressione letterale presente nel tabulato generale “riadattato”, scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} c = 0 \\ c + 2b + a = 0 \\ c + 4b + 6a = 1 \end{cases}$$

che servono a “coprire” i rimanenti posti “scoperti”, o “in bianco”, della riga.

Facendo i conti, si ha precisamente:

$$c = 0; \quad b = -\frac{1}{8}; \quad a = \frac{2}{8}$$

e perciò:

$$c + b = -\frac{1}{8}; \quad c + 3b + 3a = \frac{3}{8}; \quad c + 5b + 10a = \frac{15}{8}; \dots$$

Procedendo allo stesso modo si possono “coprire”, *ad libitum*, quante caselle si vogliano, per una stessa riga e per tutte le altre righe che si possano considerare. E, in aggiunta, Newton scopre, cosa che mette in evidenza nell’*Epistola posterior*, che queste “coperture” si possono fare evitando la noia di risolvere sistemi di equazioni ma procedendo -detto alla Leibniz- con *cogitatio caeca*, ovvero sia mediante l’automaticità che offre il *prodotto infinito*

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times \dots,$$

dove m assume il valore della cifra d'intestazione della colonna.

Nel caso di $m = \frac{1}{2}$, arrestando il prodotto ai primi due fattori si ha: $-\frac{1}{8}$,

mentre arrestandolo ai primi tre fattori si ha $\frac{1}{16}$, ecc.

Questo prodotto è oggi esplicitato mediante la forma $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$, con m numero razionale e k intero positivo,

ed è noto come "coefficiente binomiale". Ovviamente, esso dà tutti i numeri formanti sia le colonne con "l'intestazione intera" sia quella con "intestazione frazionaria".

Pertanto, il *triangolo generalizzato* (completo delle *colonne intercalate*) assume l'aspetto dato dalla tabella seguente:

1	1	1	1	1	1	1	...
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	...
0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	...
0	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	1	...
...			...			...	

Così, per esempio, si possono utilizzare i coefficienti della seconda colonna della tabella per ottenere la serie:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} + \dots$$

la quale esprime l'area del segmento circolare.

A questo punto, Newton riprende a considerare gli sviluppi dei binomi sotto radice (che erano stati il punto di partenza della sua riflessione fatta studiando gli scritti di Wallis) e osserva che essi si possono ottenere semplicemente omettendo i denominatori 1, 3, 5, 7, ..., dai termini delle "serie esprimenti le aree" (*Epistola posterior* [Gerhardt 1971, I, p. 124]):

[...] et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7, etc. in terminis exprimentibus areas.

Per conseguenza:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

È in tal modo che Newton raggiunge, sulla base di casi particolari di questo tipo, il risultato, espresso all'inizio dell'*Epistola prior*, che gli permette di calcolare la potenza di un binomio per qualunque esponente (*dimensione*), intero, frazionario positivo o negativo che esso sia. Nasce da ciò, in concomitanza, anche la cosiddetta "formula dei coefficienti binomiali", ascrivita al nome di Newton, la quale avrà poi una vita essenzialmente autonoma.

Per "provare" la liceità dell'operazione ("[...] ut probarem has operationes" – *Epistola posterior* – [Gerhardt 1971, 1, p. 124]) che gli ha consentito il passaggio, effettuato, dalla "serie dell'area" alla "serie della curva" di partenza, Newton procede ad una verifica: egli moltiplica, tra i casi considerati quali esempi paradigmatici, lo sviluppo $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$ per se stesso (con la cosiddetta "moltiplicazione lunga") ed ottiene proprio $1 - x^2$.

Raggiunta ("dimostrata", Newton scrive) la certezza della sua conclusione (vale a dire l'aver sviluppato in serie di potenze la radice, in particolare la radice quadrata, del binomio $1 - x^2$), egli aggiunge – *Epistola posterior* – di essere passato a provare a vedere, viceversa, se mai quelle serie, le quali danno le radici del binomio $1 - x^2$, non potessero estrarsi alla maniera aritmetica. Il tentativo fu coronato da successo, così egli viene a dare, a modo di esempio, lo schema dell'operazione di radice quadrata (qui già esposto con qualche annotazione in più):

$$\begin{array}{r} \sqrt{1-x^2} \quad \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.} \right. \\ \underline{1} \\ 0 - x^2 \\ \quad \underline{-x^2 + \frac{1}{4}x^4} \\ \qquad 0 - \frac{1}{4}x^4 \\ \qquad \quad \underline{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8} \\ \qquad \qquad 0 - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8 \end{array}$$

Schema che – attenzione! – viene dato sprovvisto di ogni spiegazione riguardante il “calcolo nascosto” che comunque accompagna l'esecuzione dell'algoritmo.

Per curiosità, si vuole far vedere che a un risultato di questo tipo si giunge, ovviamente, anche utilizzando la “formula del binomio”, applicata qui al caso, un po' più generale, dato da $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Volendo, infatti, sviluppare in serie $\sqrt{a^2 + x^2}$, mediante la “formula del binomio” $(a+b)^r = \sum_{i=0}^n \binom{r}{i} a^{r-i} b^i$, con r frazionario (formula che sciolta si presenta così:

$$(a+b)^r = \binom{r}{0} a^r + \binom{r}{1} a^{r-1} b + \binom{r}{2} a^{r-2} b^2 + \binom{r}{3} a^{r-3} b^3 + \dots,$$

con: $\binom{r}{i} = \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-i+1)}{i!}$, dove $\binom{r}{i}$ è il *coefficiente binomiale*), si ottiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + x^2} &= (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \binom{\frac{1}{2}}{0} (a^2)^{\frac{1}{2}} + \binom{\frac{1}{2}}{1} (a^2)^{\frac{1}{2}-1} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2} (a^2)^{\frac{1}{2}-2} (x^2)^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} (a^2)^{\frac{1}{2}-3} (x^2)^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4} (a^2)^{\frac{1}{2}-4} (x^2)^4 + \dots \end{aligned}$$

e dal momento che:

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{0} &= 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}, \\ \binom{\frac{1}{2}}{4} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!} = -\frac{5}{128}, \dots, \end{aligned}$$

si ricava:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \dots$$

4. Vi è una relazione di priorità tra i due algoritmi?

Per quanto principalmente riguarda l'argomento di questo articolo, Newton aggiunge subito poi, *Epistola posterior* [Gerhardt 1971, 1, p. 125], la seguente considerazione che ha destato la sorpresa di alcuni studiosi:

His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior.

Vale a dire che l'acquisita conoscenza dello sviluppo in serie di potenze delle radici del binomio $1 - x^2$ gli aveva fatto abbandonare completamente il "metodo di interpolazione delle serie" (e quindi la "formula del binomio") e soltanto questa operazione di estrazione di radice egli viene a porre come fondamento "più genuino" (per il nuovo calcolo che andava concependo e rivelando). Né aggiunge- gli era sfuggito lo sviluppo in serie fatto mediante la divisione ("lunga"), cosa assolutamente di facile esecuzione.

In precedenza, nella stessa *Epistola posterior*, Newton aveva precisato di essere giunto allo sviluppo della radice di un binomio (per esempio $\sqrt{1 - x^2}$) prima di conoscere (... *antequam scirem extractionem radicum*) l'algoritmo, *more arithmetico*, di estrazione della radice.

Come interpretare l'ordine con cui viene dato questo percorso di scoperte?

Newton -è ancora il caso di ricordarlo a mo' di riepilogo- cerca di completare il progetto di Wallis, vuole cioè "quadrare" non solo le figure determinate da archi di curve del tipo $(1 - x^2)^0$, $(1 - x^2)^1$, $(1 - x^2)^2$, ..., ma anche quelle prodotte dagli stessi binomi quando l'esponente sia un numero frazionario, e nel provare a dare una risposta a questo problema egli passa attraverso la cosiddetta "formula del binomio" che trova, non si dimentichi, prima di aver posseduto l'algoritmo *more arithmetico* dell'estrazione di radice quadrata, come lui afferma. Avrebbe potuto arrestarsi lì ma egli, pur accingendosi a portare tante innovazioni nelle scienze matematiche (e di tante ne sarà artefice), è comunque "prigioniero" della tradizione: ha bisogno di un algoritmo *more arithmetico* da porre a fondamento della sua teoria delle serie, così come altri autori cercheranno nel *more geometrico* la certezza delle loro argomentazioni, cosa che farà perfino Baruch Spinoza nella sua *Ethica ordine geometrico demonstrata*, pubblicata postuma nel 1677.

Per quanto riguarda la successione delle sue scoperte (dapprima la “formula del binomio” e poi l'algoritmo di estrazione della radice e subito dopo quello della “divisione lunga”) è verosimile che l'ordine sia stato proprio questo qui, così come viene indicato dallo stesso Newton. E a tal proposito c'è bisogno di fare qualche precisazione. L'algoritmo *more arithmetico* (ma sarebbe meglio dire algebrico) di estrazione di radice, presentato da Newton, comporta molti passaggi forti (anche se la loro comprensione sia ben presto favorita dal fatto che l'incedere è di tipo ricorsivo) che portano a trascurare “potenze di ordine, o dimensione, superiore”. Per quanto Newton si sarà senz'altro giovato del passo, già compiuto nella seconda metà del Cinquecento da Bombelli, col quale si era conferito dignità scientifica al processo di approssimazione (si ricorderà il calcolo di $\sqrt{13}$) e per quanto, ancora, i primi due termini dello sviluppo coincidano appieno – con indubbio conforto – con ciò che si sarebbe ottenuto con i precedenti metodi, usualmente applicati al caso numerico – a partire da quello attribuito ai babilonesi – forse, senza la sponda rappresentata dalla “formula del binomio”, il tentativo di trovare l'algoritmo algebrico della radice sarebbe risultato fin troppo arduo.

A conclusione di questa linea interpretativa, ci si potrebbe chiedere perché Newton dà – *Epistola posterior* – più enfasi al successo ottenuto al riguardo dell'algoritmo algebrico di estrazione di radice che alla “formula del binomio”. Una possibile risposta è che, probabilmente, Newton medesimo avverte che questa formula, esteticamente mirabile, è frutto di ardite manipolazioni formali e perciò non dotata del massimo della “genuinità”, o “rigore”, che, rispetto al suo tempo, poteva essere richiesto a uno studioso e accettato dai restanti membri della comunità dei cultori di scienze matematiche.

Bibliografia

- (1) [Bombelli 1966], R. Bombelli, *L'Algebra*, Milano, Feltrinelli, 1966.
- (2) [Boyer 1980], C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York (U.S.A.), J. Wiley and Sons, 1968, traduz. italiana *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori, 1980.
- (3) [Edwards, Jr 1979], C.H. Edwards Jr., *The Historical Development of the Calculus*, New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1979.
- (4) [Gerhardt 1971, 1], G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt; anast., Hildesheim-New York, G. Olms, 1971, 1.
- (5) [Gerhardt 1971, 5], G.W. Leibniz, *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irracionales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, «Acta Eruditorum», Octobris 1684, pp. 467-473, in *Mathem. Schr.*, cit.
- (6) [Loria 1950], G. Loria, *Storia delle matematiche*, Milano, Hoepli, 1950.

- (7) [Neugebauer 1974], O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Providence, Rhode Island, copyright by Brown University Press, 1957; traduz. italiana *Le scienze esatte nell'antichità*, Milano, Feltrinelli, 1974.
- (8) [Newton 1707], I. Newton, *Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Cantabrigiae [Cambridge, n.d.r.], Typis Academicis, 1707.
- (9) [Newton 1723], I. Newton, *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis*, Amstaelodami [Amsterdam, n.d.r.], Sumptibus Societatis, 1723; prima edizione Londini, ex officina Pearsoniana, 1711.
- (10) [Newton 1740], I. Newton, *La Méthode des Fluxions, et des Suites infinies*, traduz. di G.L. Leclerc Comte de Buffon, Paris, Chez De Bure l'aîné, 1740; prima edizione a cura di J. Colson, London H. Woodfall, 1736.
- (11) [Olds 1968], C.D. Olds, *Continued Fractions*, in «New Mathematical Library» published by Random House Inc., New York (USA), copyright Yale University, 1963; traduz. italiana *Frazioni continue*, Bologna, Zanichelli, 1968.
- (12) [Palladino 1995], F. Palladino, *Le quantità utili al ragionamento e alla ricerca*, in *Geometria, Fluxioni e Differenziali*, a cura di M. Panza e C.S. Roero, Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, La Città del Sole, 1995, pp. 397-441.
- (13) [Pensivy 1987-1988], M. Pensivy, *Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme*, «Sciences et techniques en perspective», Université de Nantes, volume 14, année 1987-1988.
- (14) [Picutti 1984], E. Picutti, *Storia del triangolo numerico*, in *Uomini e Numeri*, «Le Scienze-Quaderno n. 18», novembre 1984.
- (15) [Tannery 1894], P. Tannery, *Un fragment des Métriques de Héron*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., T XXXIX, 1894, Hist.-lit. Abth., p. 13-16; Bull. des Sc. Math., II Série, T. VVIII, 1894, p. 18-22.
- (16) [Timpanaro Cardini 1964], M. Timpanaro Cardini (a cura di), *Pitagorici. Testimonianze e frammenti*, Firenze, La Nuova Italia, 1964, vol. III.

APPENDICE

Si ripropongono in questa appendice *Un ricordo di Francesco Lauria* di E. Burattini e R. Prevete e *Ricordo di Ciccio Lauria* di Bruno Preziosi, pubblicati separatamente nel 2002 e nel 2003.

Un ricordo di Francesco Lauria

E. Burattini, R. Prevete

È sempre difficile ricordare un amico che si è perso da poco senza temere di essere retorico o agiografico e questo in particolare per Francesco Lauria che sicuramente non avrebbe amato né l'una né l'altra forma di commemorazione e anzi ad esse avrebbe risposto con la sua ironica risata con la quale soleva chiosare le discussioni nelle quali o non si trovava d'accordo con l'interlocutore o le giudicava inutili perdite di tempo.

Qui ci limiteremo, quindi, solo a ricordare brevemente il suo percorso scientifico richiamando i contributi più significativi e la sua attività accademica.

Francesco Lauria, ha vissuto l'intera sua vita di ricerca condividendo fin dagli inizi l'avventura di ciò che oggi si chiama Scienza cognitiva e una volta si chiamava Cibernetica.

Laureatosi in Matematica nel 1957 si avvicinava immediatamente all'Istituto di Fisica Teorica della Facoltà di Scienze della Università di Napoli Federico II, riportato a nuova vita nel 1958 da Eduardo Caianiello.

Da allora e per dieci anni circa Francesco Lauria partecipò ad una impresa culturale entusiasmante. Il gruppo di ricercatori di cui egli faceva parte, insieme a Eduardo Caianiello e Valentino Braitenberg, aveva rapidamente mostrato il suo valore tanto da attrarre presso l'Istituto di Fisica Teorica persone come Warren McCulloch, che ispirò profondamente il giovane Lauria, e Norbert Wiener che trascorse l'ultimo anno della sua vita con loro.

Con la collaborazione del neurologo Valentino Braitenberg, il matematico Francesco Lauria si formò una competenza in neuroanatomia e neurofisiologia ottenendo rapidamente importanti risultati nella modellistica matematica del sistema nervoso centrale.

I primi riflessi di questa interazione li troviamo già in un lavoro del 1960 [1] dove gli autori asserivano:

"The main problem how a brain does perform the remarkable functions, which are often so difficult to imitate by machine, is obviously related to the high degree of complexity of the structure of nerve cell aggregates (in the so-called grey substance) and to the equally high degree of functional organization which is apparent in them. This organized complexity poses novel problems to analysis. The divergent descriptions of the brains, ranging from introspective psychology to comparative neuroanatomy or the physiology of synapses would still be even without the hope of a common language, had it not been for recent attempts to formulate theories about the brain in a rigorous form which, potentially, embody all that can be said about brains. It is to these theories, as well as to some aspects of the brain which have not yet been built into the theories that we shall devote our attention here".

In quest'ultima frase potremmo dire si compendia tutto quello che poi sarà il cammino scientifico di Francesco Lauria. In questo lavoro vengono passati in rassegna i possibili approcci allo studio delle reti neurali: da quello logico, richiamando il lavoro di McCulloch e Pitts, a quello statistico dove le connessioni tra i neuroni sono viste come generate casualmente e le performance della rete studiate con le relative tecniche matematiche, all'approccio psicologico che richiama in qualche maniera l'attuale approccio cognitivista, per giungere alla conclusione che non essendo percorribile la via della completa descrizione e modellazione del cervello umano data la sua complessità, è opportuno rivolgere la propria attenzione solo a piccoli brandelli del cervello di cui sono in qualche maniera note le funzionalità. I tre fatti più significativi per la costruzione di tali modelli sono da Lauria e Braitenberg individuati nella non linearità dell'attività del neurone, nella geometria delle connessioni tra neuroni di forme e dimensioni diverse, su cui Lauria lavorerà poi a lungo, e sull'ignoranza che all'epoca si aveva dal punto di vista neurofisiologico circa il meccanismo di "memoria" dell'attività passata che le reti biologiche sembravano possedere.

Alla fine di questo lavoro, in una appendice, gli autori danno notizia delle equazioni di Caianiello che di lì a poco nel 1961 appariranno nel famoso articolo "Outline of a theory of thought processes and thinking machines" e che hanno segnato buona parte delle attività di ricerca del professor Lauria e di molti di noi.

Questo gruppo iniziale di ricerca, Braitenberg, Caianiello, Lauria ha caratterizzato non solo le attività di ricerca sulle reti neurali per tutti gli anni 60 in Italia ma ha sicuramente avuto influenza sulla ricerca in questo settore anche a livello internazionale. Ricordiamo per tutti i rapporti con l'Imperial College di Taylor e Aleksander frequentemente ospiti del gruppo di ricerca napoletano.

E sono di questi anni alcuni dei più significativi lavori di Lauria. Mi riferisco in particolare alla tetralogia apparsa nel Journal of Theoretical Biology, in anni diversi dal 1965 al 1972 intitolata "Mathematical Approach to the Study of a

Cerebral Cortex" in cui Lauria, collegandosi strettamente alle equazioni di Caianiello, riportate in fig. 1, parte con il proporre una stretta correlazione tra modello matematico e realtà biologica rappresentata a sua volta attraverso una schematizzazione di natura istologica (v. fig. 2).

Nei primi due lavori, [5], [6], Lauria cercò di stabilire un metodo per estrapolare da informazioni di natura neuroanatomica quali posizione e ruolo del singolo neurone e struttura della rete, i valori dei coefficienti di accoppiamento presenti nel modello di Caianiello e, dalle dimensioni del soma e dei dendriti, quelli delle eccitazioni sui singoli neuroni.

$$u_h(t+\tau) = 1 \left[\sum_{k,r} a_{hk}^{(r)} u_k(t-r\tau) - S_h \right] \quad 1[x] = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Fig. 1

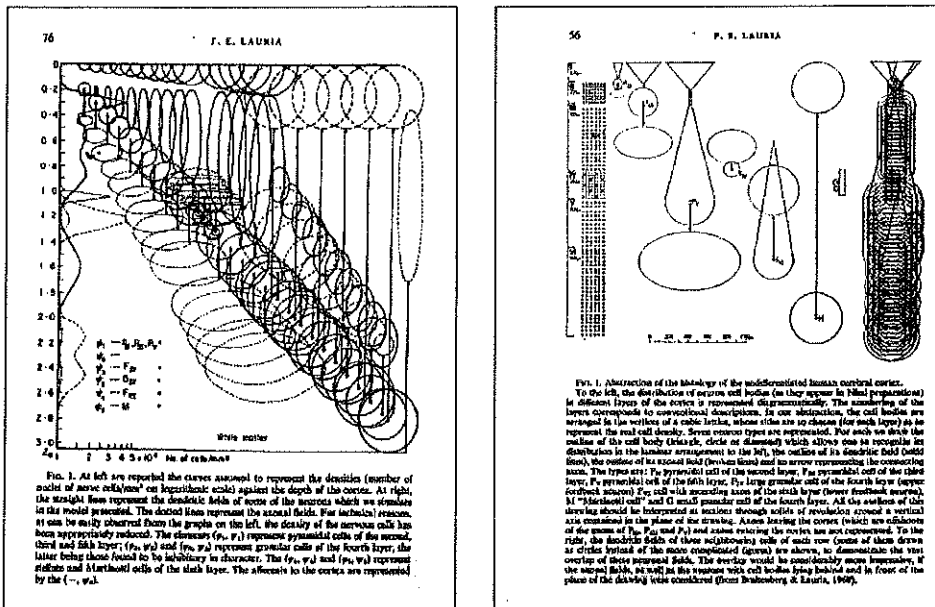


Fig. 2

In altre parole Lauria in questi lavori non vuole dedicarsi allo studio del solo modello matematico in quanto tale, ma costantemente cerca di migliorarlo con l'aiuto delle conoscenze che si andavano nel tempo ampliando sulle proprietà neuroanatomiche del cervello.

Nei secondi due articoli, quando il calcolatore era già diventato per tanti di noi un comune strumento di lavoro (1969-1972), Lauria simulò le sue ipotesi sulla macchina verificando che

“the so-called ‘columnar’ functional organization, already found in the mammalian cerebral cortex, also exist in the mathematical model previously presented, [7],[8], the theoretical and experimental values being in good agreement” and that “the ‘principle of economy’ of the maximum excitation proposed earlier [6] seems to offer a convenient way of calculating the spread of activity in the model.”

La validazione del modello fu infine fatta sulla base di esperimenti condotti a partire dallo studio e conoscenza del tetto ottico della rana.

Tutta questa parte dell'attività di Lauria avveniva in stretta simbiosi con Caianiello e Braitenberg, il fisico e il neurofisiologo che con le loro conoscenze e intuizioni fornivano la materia prima al matematico Lauria per lo sviluppo di modelli e la loro validazione sperimentale.

L'ormai incombente presenza del calcolatore aveva aperto un nuovo fronte di ricerca in Cibernetica, che già da qualche anno aveva preso il nome di Intelligenza artificiale. E Lauria già nel 1967, con Aldo De Luca, intravedeva il ruolo che il modello neurale di Caianiello avrebbe potuto giocare nello studio e implementazione di nuovi sistemi di calcolo [3] iniziando una analisi sui riverberi presenti nelle reti neurali che sarebbe stata negli anni successivi portata avanti da allievi di Caianiello e suoi. Ma mentre una parte di questi ricercatori si impegnava nella ricerca e nello studio delle proprietà dei riverberi, visti come potenti sistemi di memorizzazione di dati, Lauria proseguiva con gli strumenti forniti dalla teoria dei modelli biologici e dalla teoria della calcolabilità, su quella strada da cui era partito, la corteccia cerebrale, esplorando il mondo dell'apprendimento avendo come riferimento, per gli aspetti biologici, un altro classico autore proveniente dal mondo della neurofisiologia Donald Hebb [4]. I meccanismi descritti da Hebb nel suo lavoro ispireranno sempre lo studio di Lauria portandolo a interessanti risultati alcuni dei quali dovevano essere presentati ad un convegno che si è tenuto pochi giorni dopo la sua dipartita (WIRN - maggio 2002). Prima di giungere comunque a questi risultati anche la sua ricerca si riorientava nelle fluttuazioni che seguirono le critiche, rivelatesi poi eccessive, di Minsky e Papert alla metodologia delle reti neurali [9]. La sua attenzione si portò ai sistemi distribuiti nel cui ambito ottenne, con la collaborazione di stuoli di studenti, le cui tesi non aveva mai smesso e non smetterà mai di seguire con dedizione paterna, considerevoli risultati tecnici, realizzando un ambiente di sviluppo a metà strada tra la rete neurale e il calcolo distribuito a grana molto fine.

A partire da modelli neurali, strettamente correlati a quello di Caianello, e supposti dotati di pesi variabili regolati da leggi obbedienti ai meccanismi descritti da Hebb [4], i suoi studi si concentrarono sulla ricerca di possibili condizioni sufficienti che delimitassero i valori dei pesi in modo da ottenere una rete con un apprendimento non supervisionato e con “nessun scopo in mente”. Una rete, cioè, che fosse capace di apprendere i “giusti comportamenti” solo tramite l’interazione con il suo ambiente e che presentasse uno sviluppo incrementale della sua “conoscenza” rispetto a quanto man mano andava apprendendo.

Nell’ambito di tali studi fu definito un linguaggio (CONNET) e furono implementati strumenti software (Java package `it.na.cy.nnet`) per la descrizione e la simulazione di istanze di detti modelli. Fu pertanto profuso un grande impegno sia per realizzare e testare effettivamente tali modelli sia per trovarne la formalizzazione più opportuna.

Quindi le reti neurali e la loro capacità di modellizzazione del sistema nervoso centrale e di conseguenza del processo mentale – sua meta profonda inseguita per tutta la vita con dedizione completa – rimanevano il fuoco del suo interesse e il rilancio di attività “neurali” nell’ambito della comunità cibernetico-intelligente artificiale – nella quale si era fatto promotore in Italia di associazioni quali la AI*IA (Associazione Italiana per l’Intelligenza Artificiale) e la Siren (Società Italiana Reti Neuroniche) – gli permettevano di tornare a pieno titolo al suo tema tecnico preferito: l’apprendimento non supervisionato, non tanto nel senso applicativo che ha oggi di auto-organizzazione e ottimizzazione, quanto come manifestazione di uno dei fenomeni mentali forse più inspiegabili: come fa un ente – animato o inanimato che sia – a imparare qualcosa senza neanche conoscere i mezzi da mettere in atto per conseguire lo scopo?

In questa sua ripresa di attività scientifica nell’ambito delle reti neurali – premiata pochi giorni prima della morte da un importante riconoscimento conferitogli dallo “European Congress on Cybernetics and Systems Research” – Francesco Lauria precorse gli atteggiamenti della nuova Scienza cognitiva, quale il grounding dei simboli e l’importanza per il sistema artificiale di essere situato nel mondo, rimanendo superiormente indifferente alla controversia tra metodi simbolici e non simbolici.

Il ruolo giocato dal prof. Lauria nella vita accademica napoletana è stato fondamentale anche quando nel Sessantotto la Cibernetica napoletana ebbe grossi rivolgimenti. In quegli anni, ancora per opera di Caianiello, nacque l’Istituto di Cibernetica del CNR ad Arco Felice. Lauria riuscì a mantenere viva, con la sua capacità organizzativa e di mediazione la collaborazione tra Università e CNR facendo parte della Giunta di direzione dell’Istituto di Cibernetica e assumendo

successivamente la direzione dell'Istituto di Fisica Teorica. Egli è sempre stato un punto di riferimento saldo nella variabilità delle situazioni contribuendo in maniera determinante alla nascita del Gruppo di Cibernetica a Fisica Teorica, dell'Istituto di Cibernetica del CNR, dell'IIASS (Istituto Internazionale per gli Alti Studi Scientifici) e più di recente dando un contributo essenziale alla introduzione a pieno titolo della Informatica alla Federico II da cui è scaturito il Corso di Laurea in Informatica. Per quest'ultimo obiettivo Francesco Lauria ha speso le sue ultime energie conscio dell'evolversi del suo male ma fermo nei principi che hanno ispirato tutta la sua vita: contribuire all'avanzamento culturale dei giovani della sua terra attraverso l'ampliamento delle conoscenze e la costituzione e il rafforzamento di adeguati organismi accademici e scientifici. Ed infine non ha mai fatto mancare il suo apporto alla Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti di cui era fiero di essere membro.

Questa breve rassegna non è e non vuole essere certamente esaustiva dell'opera scientifica di Francesco Lauria, è solo il risultato di ricordi e alcune discussioni avvenute tra un vecchio ricercatore amico di Lauria e un giovane ricercatore suo allievo.

Vorrei concludere questa breve presentazione con due citazioni. La prima proviene da uno scritto di Eduardo Caianiello e sembra perfettamente disegnare la figura dello scienziato Francesco Lauria:

"If ever there was a field (Cybernetics) of research in which the true qualities of a scientist should be displayed, we think this is one; for a scientist is not a man who knows, but a man who knows that he does not know, and tries to find out, with caution and humility".

La seconda è contenuta in un trafiletto apparso recentemente nel giornale della nostra Università in cui Giuseppe Trautteur ricorda l'uomo Francesco Lauria e che, a chi come molti di noi lo conoscevano personalmente, rende perfettamente il ricordo:

Ma chi era Ciccio? Ciccio era il suo sorriso: accattivante, sereno, scherzoso. Questo sorriso si spandeva più aperto nella sua amata Anacapri in cui da decenni aveva preso residenza. E con questo sorriso lo ricorderemo, nella sua eleganza ignara dei canoni, nella sua riservatezza attenta, nel suo discreto e inesausto amore per la conoscenza.

Bibliografia

1. Braitenberg V., F. E. Lauria, "Toward a mathematical description of the grey substance of nervous systems", *Nuovo Cimento*, n. 2 del Suppl. al Vol. 18, Serie X, (1960) 149-165.
2. Caianiello E.R., "Outline of a theory of thought processes and thinking machines", *Journal of Theoretical Biology* 2, (1961) 204-235.
3. De Luca A., F. E. Lauria, "Transient states and reverberations" *Calcolo*, vol. 4, fasc. 2 (1967) 323-336.
4. Hebb D.O., "The organization of the behavior. A neuropsychological theory", J. Wiley and Sons, New York, USA, 1949.
5. Lauria F. E., "Mathematical approach to the study of a cerebral cortex - I. Histological methods of calculating the coupling coefficients in the neuron equations", *J. Theoret. Biol.* 8, (1965) 54-70.
6. Lauria F. E., "Mathematical approach to the study of a cerebral cortex - II. The self-consistency of the model and the coupling coefficients of the neuron equations", *J. Theoret. Biol.* 23, (1969) 72-86.
7. Lauria, F. E., R. Prevete, M. Milo, "An Adaptable Boolean Neural Network Performing Specific Sequence Learning", *IJCNN2000*, Como, Italy (EU) Sun-Ichi Amari, Sun Lee Giles, M. Gori, V. Piuri eds.: *Neural Computing: New Challenges and Perspectives for the New Millennium*. IEEE Computer Soc. (Los Alamitos, CA, USA) Vol. 3 (2000) 181-185.
8. Lauria, F. E., R. Prevete, "An algebraic approach to the autonomously self-adaptable Boolean neural nets", *Acc. Sc. Fis. e Mat., Liguori*, (Napoli), (2001).
9. Lauria, F. E., R. Prevete, "Specific sequence learning by an adaptable Boolean neural network", M. Marinaro & R. Tagliaferri eds., "Neural networks WIRN Vietri-01" (in print).
10. Minsky M., Papert S., "Perceptrons: an introduction to Computational Geometry", MA, MIT Press, 1969.

ISTITUTO DI MATEMATICA
DELL' UNIVERSITÀ DI NAPOLI
Via Mezzocannone 8
Tel. 20277

75-VI-1957

Il giovane Francesco Lauria, laureando in Matematica presso questa Università, è stato mio allievo per gli studi di Analisi, e attende ora alla compilazione della sua Tesi di laurea, sotto la mia direzione. I corsi di Analisi che ha seguito con buon profitto, acquistando una solida preparazione culturale, riguardavano le funzioni di variabili reali, le funzioni analitiche, e la ~~ma~~ teoria moderna delle superficie di Riemann (corso monografico). La Tesi è dedicata ai fondamenti della teoria delle funzioni analitiche, con lo scopo di raccogliere e coordinare le difficili ricerche concernenti le varie possibili estensioni della condizione di monogenità.

Il Lauria è un giovane d'ingegno, volenteroso e preparato. La sua mentalità lo inclina talvolta alla speculazione astratta; ma la varietà dei suoi interessi e la sincera passione per il lavoro scientifico potrebbero anche indirizzarlo verso ricerche applicative.

prof. Renato Caccioppoli
ordinario di Analisi Matematica
nell'Università di Napoli

Ricordo di Ciccio Lauria

Bruno Preziosi

Come si vede dalla lettera autografa di Renato Caccioppoli, nell'estate del 1957 Ciccio Lauria stava lavorando sotto la guida di tanto Maestro alla sua tesi di laurea sulle funzioni olomorfe, laurea in matematica che conseguì nello stesso anno.

Di questa lettera è particolarmente interessante la parte conclusiva:

Il Lauria è un giovane di ingegno, volenteroso e preparato. La sua mentalità lo inclina talvolta alla speculazione astratta; ma la varietà dei suoi interessi e la sincera passione per il lavoro scientifico potrebbero anche indirizzarlo verso ricerche applicative.

Quest'ultima frase chiaramente indica che la lettera stessa è finalizzata a presentarlo a qualcuno che avrebbe potuto avere interesse ad utilizzare le sue capacità matematiche in un campo non strettamente matematico. Il fatto che questa lettera sia stata scritta prima ancora che Ciccio Lauria si laureasse mi fa ipotizzare che a quella data aveva già preso contatto con Eduardo Caianiello.

A questo punto diventa indispensabile fare il quadro scientifico della fisica napoletana a quell'epoca.

Eduardo Caianiello, pur avendo vinto la cattedra di Fisica Teorica presso l'Università di Napoli (già di Majorana) alla fine del '55, si insediò stabilmente a Napoli presso l'Istituto fisico di via Tari solo nel novembre del 1956. Ai giovani che frequentavano il suo corso di Fisica Teorica e con cui si intratteneva molto volentieri rivelò che aveva in animo di indirizzare la ricerca in fisica a Napoli in modo che accogliesse, per quanto possibile, le ricerche che si andavano sviluppando nel mondo e che personalmente era interessato non solo alla Fisica Teorica, ma anche ad una nuova scienza: la Cibernetica. Quanto grande sia stata la ventata di innovatività indotta da Caianiello e l'impennata della fisica negli anni appena successivi fa parte della storia della nostra Università. Basti dire che già alla fine dell'anno accademico 1958-59 Eduardo poteva contare su un gruppo di ricercatori, neolaureati e laureandi che costituiranno il nucleo della fisica napoletana.

Fra questi Ciccio Lauria, che fu indirizzato, nel modo che cercheremo di descrivere, verso la cibernetica.

Vale a questo punto la pena di ricostruire come nacque questo interesse di Eduardo verso la Cibernetica, campo in cui non si era affatto cimentato scientificamente.

Nel 1953-54 era rientrato, per una visita in vari istituti italiani, Enrico Fermi. A tutti coloro che gli chiedevano quale fosse il settore che avrebbe avuto il maggiore sviluppo Fermi indicò il campo dei calcolatori; (en passant, fra questi c'era anche Adriano Olivetti). Su questa spinta fu organizzato nel 1954, presso l'Istituto di Fisica di Roma, in cui Eduardo era assistente, un seminario a più voci in cui si parlò di calcolatori, di Teoria dell'Informazione e della Cibernetica di Norbert Wiener. Fra i partecipanti al seminario c'era Valentino Braitenberg, giovane assistente volontario della Clinica Neuropsichiatria e dilettante di neuro-anatomia. Al termine delle giornate Eduardo e Valentino prendevano insieme la circolare esterna di Roma; durante il tragitto, Eduardo manifestò più volte il suo vivo interesse a capire qualcosa sul funzionamento del cervello.

Nel periodo immediatamente successivo Eduardo fu fortemente impegnato nella sua attività scientifica ed in particolare in un corso a Princeton su *Advanced topics in quantum theory*. Ma non dovette trascurare il suo interesse per la cibernetica, tant'è che, nel novembre 1957, arrivò a Via Tari un signore, riconoscibile come tirolese dal cappello, con una voluminosa scatola piena di fotografie e disegni dedicati al cervello.

Gli fu subito affiancato, insieme a Nello Onesto, Ciccio, fresco laureato, che dovette addottorarsi nel nuovo campo attraverso lo studio di un ponderoso trattato di neurofisiologia, la lettura di specifici lavori scientifici, e con la partecipazione ad una scuola estiva, organizzata da Eduardo a Varenna nell'estate del 1958, cui parteciparono, tra gli altri, Wiener, Rosenbueh, Bob Fano, Davenport, Bar-Hillel, Halle, Newman, Lee, Gabor e Scott.

Va detto che agli inizi del 1958 Eduardo e quelli che avevano cominciato a collaborare con lui avevano abbandonato via Tari e si erano trasferiti nel padiglione 19 della Mostra d'Oltremare, dove, il 1 Aprile dello stesso anno, Werner Heisenberg inaugurava la Scuola di Perfezionamento in Fisica Teorica e Nucleare.

Anche Ciccio era iscritto a questa scuola, godendo di una delle borse di studio assegnate dall'allora Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, presieduto dal nostro compianto Felice Ippolito, che aveva fortemente voluto queste scuole.

Già a gennaio 1959 compare, su *Il Nuovo Cimento*, il lavoro *A System of Coupled Oscillators as a Functional Model of Neuronal Assemblies* di V. Braitenberg, E.R.Caianiello, F. Lauria e N. Onesto. In tale lavoro viene presentata l'idea di schematizzare l'interazione fra neuroni attraverso l'accoppiamento di oscillatori, ma si evidenzia che il modello deve:

- contenere un numero basso di parametri funzionali;
- assimilare tra loro forme che, pur non essendo identiche, sono somiglianti;
- tener presente che la risposta di un sistema di neuroni è una risposta globale.

Tali esigenze, che scientificamente richiamano l'impostazione della termodinamica, rispondono anche a risultanze sul comportamento sperimentale di animali.

È interessante osservare che il successivo lavoro *Toward a mathematical description of the Grey Substance of Nervous System* firmato da V. Braitenberg e F. Lauria ed apparso a fine 1960 fa riferimento, in appendice, a quelle che Eduardo chiamava "le equazioni del pazzo" e che compariranno ai primi del '61 nel celebrato articolo di E.R. Caianiello *Outline of a theory of thought processes and thinking machines* pubblicato su *Journal of Theoretical Biology*.

Eduardo le chiamava equazioni del pazzo perché le stesse erano veramente schematiche.

Il formalismo è il seguente:

- lo stato $u_h(t)$ dell' h -mo neurone al tempo t può assumere solo i valori 0 e 1;
- lo stato $u_h(t+\tau)$ dell' h -mo neurone al tempo $t+\tau$ è legato alla eccitazione che riceve dagli altri neuroni in tempi precedenti;
- $a_{hk}^{(r)}$ ($h \neq k$) sono coefficienti che rappresentano lo scambio di eccitazione dal neurone k al neurone h , e che dipendono anche dal ritardo con cui perviene l'eccitazione al neurone k ;
- se l'eccitazione complessiva che tende a pervenire al neurone h non supera una soglia S_h il neurone h non cambia stato.

Con tale formalismo le equazioni sono:

$$u_h(t) = \left[\sum_{k,r} a_{hk}^{(r)} u_k(t-r\tau) - S_h \right]$$

Si introduceva così un importante perfezionamento rispetto modello di McCulloch e Pitts, soprattutto perché includeva nelle equazioni il processo mnemonico (per questo anche la dizione di equazioni mnemoniche).

Ciccio si rendeva conto della inadeguatezza di tali equazioni a rappresentare la complessità dei comportamenti neuronali e si dedicò negli anni successivi a rendere più realistico tale modello pubblicando come unico autore su *Journal of Theoretical Biology* una tetralogia dal titolo unificante *Mathematical approach to the study of a cerebral cortex* con vari sottotitoli.

A tale scopo Ciccio ebbe vari contatti con varie istituzioni straniere:

- nel '60 insieme a Braitenberg ed Onesto presso il gruppo di ricerca dell'MIT diretto da Warren McCulloch (il padre della teoria delle reti neurali) e Norbert Wiener (il padre della Cibernetica);
- a Stoccolma presso il Karolinska Institute di Neurofisiologia
- in Germania presso l'istituto di ricerche di istologia del sistema nervoso "Hirn Vorschung" di Neustadt.

Egli successivamente mantenne i contatti con Mc Culloch e Wiener, e li estese a Jack Cowan, Mike Arbib, Donald MacKay, M.P. Schutzenberger, Heinz von Foerster.

Dal viaggio in Svezia e Germania tornò con un significativo bagaglio di dati sperimentali che elaborò ed inserì nel suo modello. A tale scopo utilizzava per i suoi calcoli sia una rumorosissima *Divisumma* della Olivetti sia un 1620 IBM del Centro di Calcolo dell'Università allocato presso l'Istituto di Chimica (mi piace ricordare che su tale macchina Iadonisi ed io effettuammo calcoli preliminari del primo lavoro in comune).

Nessun commento su questi approfondimenti *realistici* di Ciccio mi sembra più appropriato di quello fatto da Eduardo in un attestato del giugno '69 in cui scrive tra l'altro:

Il suo campo di indagine è da diversi anni costituito dalla descrizione matematica di un sistema nervoso reale, in particolare delle zone aspecifiche della corteccia cerebrale. Per far ciò egli ha dovuto acquistare profonde conoscenze di neuroanatomia e fisiologia, e trovare il modo di riassumere una congerie immensa di dati in uno schema esprimibile mediante precise equazioni matematiche; il costante rischio di una tale impresa consiste, ovviamente, egualmente nel trascurare dati essenziali o incorporarne di superflui a scapito dell'efficienza delle trattazioni matematiche. Ho sempre ammirato la maniera con la quale è riuscito, con pazientissimo lavoro durato anni, a ridurre, mediante semplici e convincenti ragionamenti, il numero di parametri incogniti fino ad un minimo ben accettabile; il successo di questo suo studio, che egli ha ancora in atto ed intende continuare in futuro, è mostrato, oltre che dai numerosi consensi internazionali, da risultati di singolare interesse, tra i quali mi pare particolarmente indicativa la dimostrazione da lui fornita matematicamente, in base al suo modello, della esistenza di legami inibitori anzichè facilitatori fra certi neuroni dello strato centrale della corteccia; cosa che è risultata in perfetto accordo con congetture già avanzate da molti neurofisiologi mediante considerazioni puramente teleologiche.

Eduardo qualificava Ciccio come il Van der Waals delle Reti Neuroniche, proprio perché si stava sforzando di sostituire equazioni reali a quelle ideali.

A quell'epoca Ciccio fu anche uno dei promotori dei settimanali pomeriggi che il gruppo di cibernetica trascorreva in isolamento nella villa virgiliana di Cuma in cui i componenti si scambiavano approfondimenti di tipo scientifico ed informazioni sullo stato di avanzamento delle proprie ricerche; val la pena ricordare che nel frattempo il gruppo si era arricchito con la presenza di Calogero Crocchiolo, Aldo de Luca, Giuseppe Gambardella, Giorgio Ghigo, Stefano Levialdi, Luigi M. Ricciardi, Giuseppe Trautteur, Uja Vota, Milena Kemali e Cloe Taddei.

Questa esperienza di pomeriggi virgiliani, in cui, come mi ricordava Aldo de Luca, vi era una ricca interazione fra i partecipanti che consentiva a ciascuno di

conoscere le problematiche ed il linguaggio degli altri, fu anche vissuta, separatamente, dal gruppo che successivamente costituirà il nucleo della Fisica Teorica degli Stati Condensati della nostra Università (Maria Marinaro, Antonio Coniglio, Giuseppe Iadonisi, Marco Maturi ed io stesso).

Tale attività si svolse fino al 1968 presso l'Istituto di Fisica Teorica; in tale anno il grosso si trasferì presso il neo-costituito Laboratorio di Cibernetica del CNR ad Arco Felice e Valentino lasciò Napoli; il miglior commento a questo decennio di ricerca cibernetica presso il nostro Istituto è in queste parole scritte da Valentino nell'ambito di un breve rapporto sulle attività che vi si svolsero:

Notevole anche, specialmente per l'eccellenza del lavoro (mai raggiunta da altri!) dei nostri tecnici Enrico Sada, Vittorio Guglielmotti e Eduardo Casale, la ricerca sul sistema visivo degli insetti, che divenne subito molto famosa e mi fruttò diverse chiamate a cattedra in America e in Germania. Malinconica, anche se non ingloriosa, fine di un magnifico decennio.

L'attività scientifica di Ciccio non si allontanerà successivamente dal suo filone, anche se sempre più si sarebbe concentrata nel cercare le connessioni con i nuovi sistemi di calcolo. Questa linea, che ha inizio con un lavoro pubblicato con Aldo de Luca del 1967, analizza i riverberi presenti nelle Reti Neurali, visti come potenti mezzi di memorizzazione di dati. Come sottolinea Ernesto Burattini nel **ricordo di Francesco Lauria**, appena pubblicato dalla nostra Accademia, *la sua ricerca si viene a concentrare su possibili condizioni per ottenere una rete con un apprendimento non supervisionato e con nessuno scopo in mente, una rete cioè che fosse capace di apprendere i giusti comportamenti solo tramite l'interazione con l'ambiente e che presentasse uno sviluppo incrementale della sua conoscenza.*

Riassunta così per brevità l'attività scientifica di Ciccio, che assomma ad oltre 70 contributi fra pubblicazioni su riviste internazionali, 2 libri, contributi a libri del settore e numerosi contributi a proceedings di congressi, veniamo a parlare brevemente della sua copiosa attività didattica.

Dopo il periodo di borsa di cui si è detto, Ciccio fu assunto, dal novembre 1961 come ricercatore aggiunto incaricato dal CNR, ma già dall'anno accademico 1963-64 diviene professore incaricato di Calcolo Operativo presso l'Università di Napoli e, dal 1965 professore incaricato di Teoria dell'Informazione. Questa possibilità di insegnamento, di cui moltissimi di noi godettero contemporaneamente, fu originata dalla trasformazione del corso di Laurea in Fisica, voluta dal Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, che introdusse nell'ordinamento l'articolazione in tre indirizzi (generale, didattico ed applicativo) con la possibilità di differenziare l'indirizzo applicativo in tre orientamenti, che, per Napoli, furono il cibernetico, il nucleare e lo stato solido. Questa riforma consentì un significativo aumento nel numero di corsi e in parte spiega la rapida crescita scientifica che si ebbe in quegli anni. Dal '69 Ciccio tenne il corso di Teoria

dell'Informazione come professore aggregato e dal '72 prima come professore straordinario e poi come professore ordinario. Il taglio dato al suo corso aveva sempre privilegiato gli aspetti fondazionali della materia, mentre poca enfasi veniva data agli aspetti informatici di tipo strumentale e pratico; questo atteggiamento, che era condiviso dagli altri docenti dell'orientamento cibernetico, ebbe una svolta nel '75 dopo una riunione sul terrazzo di casa Lauria in cui si decise di andare verso un maggiore approccio informatico. Tuttavia, il fatto che i laureati di questo gruppo non abbiano sostanzialmente avuto difficoltà ad un inserimento nel mondo della produzione e della gestione di sistemi è prova della validità dell'insegnamento. Va a questo proposito enfatizzato che i laureandi avevano una forte preparazione di fisica di base conseguita nel triennio, mentre la specializzazione si concentrava nell'ultimo anno e nella preparazione della tesi di laurea. Ciccio Lauria è stato relatore della sua prima tesi di laurea nel 1968. Da quel momento in poi è stato relatore di ben 55 tesi di laurea in Fisica, mai ripetitive, con una media di quasi due tesi all'anno e punte di cinque. Questo numero è tanto più significativo se si pensa che il numero di laureati in Fisica per anno è in media stato di 55-60.

Sulla personalità di Ciccio, il carissimo amico Giuseppe Trautteur ha parlato in termini commossi e puntuali nel suo articolo su Ateneapolis, in parte ripreso da Ernesto Burattini nel suo **Ricordo**.

Molto affettuoso anche il ricordo di Aldo de Luca:

Egli detestava le formalità così come le pietanze elaborate. Pur essendo stato un appassionato di autovetture (quando l'ho conosciuto aveva una fuoriserie decappottabile) successivamente decise di vivere senza automobile. Quando aveva un po' di tempo libero, in ogni stagione e soprattutto in inverno, si recava in un suo appartamento ad Anacapri dove lavorava e viveva, spesso da solo, in una atmosfera di grande tranquillità e a contatto con la natura.

Ma anche significativo quanto ha scritto di lui un Anacaprese:

È inutile che le dica, Caro professore, che siamo tristi che Lei non torni più sulla sua isola, nel suo mondo fatato, fra i suoi fiori, fra i suoi amici. Ci mancherà caro professore. Ci mancherà la sua compagnia, la gioia di vederLa ritornare, il suo sorriso. E non a caso la chiamo professore e non Professor Francesco Lauria, perchè io, gli amici della piazza e Anacapri tutta, La porteremo sempre nel cuore e La ricorderemo per sempre come quell'uomo semplice e minuto col cappellino e lo zainetto sulle spalle. Anzi ci consoleremo immaginandoLa, allo stesso modo, alla scoperta di ogni più remoto angolo dell'universo.

Addio professore

Un amico

Personalmente desidero sottolineare l'eccezionale rapporto che Ciccio ha avuto con la vita familiare e con l'attività universitaria, avendo costantemente cura di tenerle separate.

Per quanto riguarda la prima desidero ricordare che Ciccio ha trascorso una vita felicissima insieme alla moglie Matilde, la quale è stata per lui un insostituibile sostegno avendogli col suo supporto consentito di svolgere in piena serenità il suo lavoro scientifico.

Pur avendo io avuto con lui un ottimo rapporto di amicizia ed una frequentazione continua, ho saputo solo pochi giorni fa dalla figlia Adele che ben due dei suoi figli ne hanno seguito le orme in campo scientifico:

- Mario, esperto di Calcolo Parallelo, attualmente assistant professor presso la Ohio University,
- Stanislao, esperto proprio in Reti Neurali, attualmente lecturer alla Brunel University.

Questo a testimonianza delle sue altissime qualità umane.

Infine, un mese e mezzo prima della sua morte, Salvatore Solimeno mi aveva detto che Ciccio non stava affatto bene; nonostante ciò, sapevo che stava portando avanti un concorso di Informatica, poi conclusosi con la idoneità ad ordinario di due valenti ricercatori cui la nostra Facoltà è particolarmente interessata. Come testimonianza del suo impegno scientifico ricordo che a metà Marzo aveva ricevuto, al "XVI European Meeting on Cybernetics and Systems Research" a Vienna, il "Premio Caianiello" per il miglior lavoro presentato, dal titolo "A Cybernetic Approach to Sequence Learning", simbolicamente ritirato per lui dall'amico Luigi Maria Ricciardi. Inoltre ai primi di Aprile aveva inviato a Neural Networks il suo ultimo articolo: "A Boolean Net Autonomously and Deterministically Controlling the Hebbian Rule". Per questa ragione pensavo che non stesse tanto male; senonché, a metà Aprile, lo incrociai mentre usciva dalla sua stanza e fui colpito dal fatto che aveva praticamente perso quasi completamente la sua folta capigliatura; non potei fare a meno di dire: "Ciccio, ma che succede?" e lui mi rispose, con il suo solito tono: "Eh! È la vecchiaia!"

Fu il nostro ultimo incontro. Seppi poi che la sua malattia si era rivelata già a Febbraio, che la sua gravità era andata crescendo in modo esponenziale ma che aveva voluto portare a termine, con estrema difficoltà, anche un concorso di ricercatore a Salerno. Dieci giorni dopo ci ha lasciato.

Questo era l'uomo!

Bruno Preziosi

ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI

Il *Rendiconto* pubblica, di norma in lingua italiana, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Nella stesura della *Nota* si raccomanda l'uso di Microsoft® Word 2000 o in alternativa di LaTeX™. Le *note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom). La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto e stampati con una stampante laser dalla buona risoluzione (600 dpi). Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere stampate ad alto contrasto. Una copia a bassa risoluzione o una fotocopia di ciascuna fotografia, grafico o disegno, sarà collocata opportunamente nel dattiloscritto accompagnata dalla relativa didascalia, l'originale sarà sempre allegato a parte. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti Bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate nell'esempio in *Appendice*.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori sarà superiore a uno. Ulteriori estratti e/ o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

Abstract - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righe

Riassunto - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righe e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

1 - INTRODUCTION

Si lascia 0.5 righe e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righe. Si usa il **grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righe e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione INTRODUZIONE. L'ultima sezione deve essere sempre RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS), 3 - RISULTATI (RESULTS), 4 - DISCUSSIONE (DISCUSSION), o CONCLUSIONI (CONCLUSIONS), 5 -RIFERIMENTI

APPENDICE

NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

Prima pagina.

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara
(canale d'Ischia, Campania)
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1,*}

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

Key words: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**
Nota di Vincenzo Rosso¹, Nicola Verde² e Pasquale Bianco^{1*}

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

^{1,2...} Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, 230, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:

Acknowledgements: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

¹ Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

